SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TRƯỜNG**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI	**NĂM HỌC 2023- 2024**
	Môn Toán

Ngày 04/09/2023

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (5,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực $x;y$, ta có:

$$f(f(x)+y)+f(x)f(f(y))=xf(y)+x+y \quad (1)$$

Câu 2. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. H là hình chiếu của A trên BC. N là trung điểm cuả AH. Đường thẳng qua D, N cắt CA, AB lần lượt tại $J, S; BJ$ cắt CS tại P. Các đường thẳng DA, DP lần lượt cắt (I) tại G, L. Gọi EF cắt BC tại X.

a) Chứng minh rằng A, P, X thẳng hàng.

b) Gọi K, T theo thứ tự là giao điểm thứ hai của DI, DN và (I). Chứng minh: K, T, X thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, G, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho số nguyên dương n và p là số nguyên tố lẻ. Giả sử $n=qp+r$ với $0\le r\le p-1$ và q nguyên dương. Đặt. $S_n=\sum_{k=0}^{qp}(-1)^k.C_{r+k}^{r}$

a) Khi $p=3$, chỉ ra một giá trị n nguyên dương lớn hơn 5 sao cho S_n chia hết cho p.

b) Chứng minh rằng nếu p là ước của S_n thì q là số lẻ.

Câu 4. (5,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho có thể phân chia tập $\{1,2,\ldots,3n\}$ thành n tập con 3 phần tử rời nhau $\{a,b,c\}$ sao cho $b-a$ và $c-b$ là các số khác nhau trong tập $\{n-1,n,n+1\}$.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực $x;y$, ta có:

$$f(f(x)+y)+f(x)f(f(y))=xf(y)+x+y \quad (1)$$

Lời giải:

+) Thay $x=y=0$ vào phương trình (1), ta có $f(f(0))+f(0)f(f(0))=0.$

suy ra $f(f(0))=0$ hoặc $f(0)=-1$.

Ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu $f(f(0))=0$.

Thay $y=0$, vào phương trình (1), ta có $f(f(x))= xf(0)+x, \forall x\in\mathbb{R}$

Thay $x=f(0)$ và sử dụng $f(f(0))=0$, ta được $f(0)=[f(0)]^2+f(0)$, hay $f(0)=0$.

Do đó $f(f(x))=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Thay vào phương trình (1), ta có

$$f(f(x)+y)+yf(x)=xf(y)+x+y, \forall x,y\in\mathbb{R},$$

Thay y bởi $f(y)$ và sử dụng tính đối xứng của vế trái, ta được

$$f(f(x)+f(y))+f(x)f(y)=xy+x+f(y)=xy+y+f(x).$$

Do đó $f(x)-x=f(y)-y$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$, hay $f(x)=x+c$. Thử lại, ta có $c=0$.

+) Nếu $f(0)=-1$.

Thay $y=0$ vào phương trình đề cho, ta có $f(f(x))+ f(x)f(-1)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Từ đây suy ra $f(f(-1))=-[f(-1)]^2$.

Thay $x=0$ vào phương trình đề cho, ta có $f(y-1)-f(f(y))=y, \forall y\in\mathbb{R}$.

Kết hợp các đẳng thức trên lại, ta có $f(x-1)+f(x)f(-1)=x, \forall x\in\mathbb{R}.$

Thay $y=-1$ vào phương trình đề cho và sử dụng $f(f(-1))=-[f(-1)]^2$, ta lại có

$$f(f(x)-1)-f(x)[f(-1)]^2=xf(-1)+x-1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mặt khác, ta cũng có $f(-1)f(f(x))+f(x)[f(-1)]^2=0, \forall x\in\mathbb{R}.$

Cộng vế theo vế hai biểu thức trên lại, ta có $f(x)=[1+f(-1)]x+1, \forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại, ta thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm hàm duy nhất là $f(x)=x$.

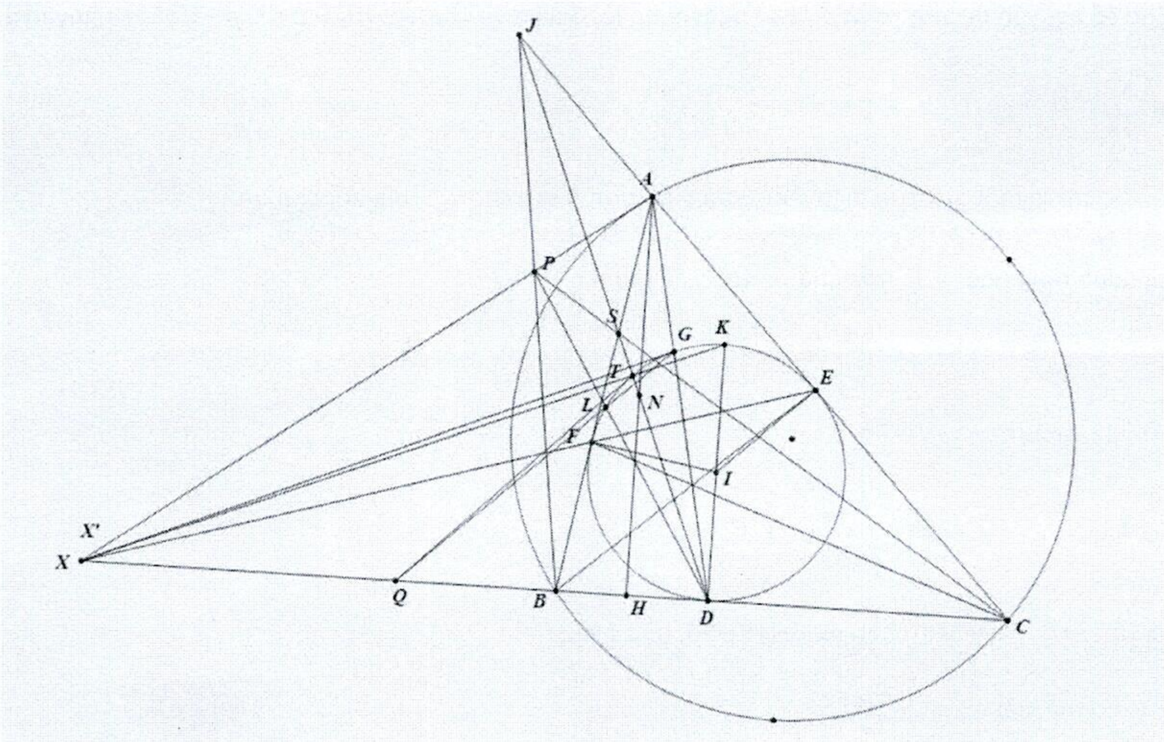
Câu 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E,F. H là hình chiếu của A trên BC. N là trung điểm cuả AH. Đường thẳng qua D,N cắt CA,AB lần lượt tại $J,S;BJ$ cắt CS tại P. DA,DP lần lượt cắt (I) tại G,L. Gọi EF cắt BC tại X.

d) Chứng minh rằng A, P, X thẳng hàng.

e) Gọi K, T theo thứ tự là giao điểm thứ hai của DI, DN và (I). Chứng minh: K, T, X thẳng hàng.

f) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, G, L cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải:



Trong lời giải này kí hiệu ZZ chỉ tiếp tuyến với (I) tại điểm Z thuộc (I).

Gọi X', Q theo thứ tự là giao điểm của BC với AP, GL

Dễ thấy AD, BE, CF đồng quy nên $(BCDX) = -1$.

Vì JD, BA, CP đồng quy (tại S) nên $\left(BCDX'\right) = -1$.

Vậy $(BCDX) = \left(BCDX'\right)$. Điều đó có nghĩa là $X \equiv X'$.

Vì DG, EE, FF đồng quy (tại A) nên tứ giác $DEGF$ điều hòa. Do đó EF, DD, GG đồng quy (tại X). Nói cách khác GX tiếp xúc với (I) (1)

Vì N là trung điểm của AH và $DK // AH$ nên $D(GDTK) = D(AHNK) = -1$.

Do đó $DTGK$ là tứ giác điều hòa (2)

Từ (1) và (2) suy ra KT đi qua X. Dễ thấy

$$D(GLTD) = D(APJB) = A(DPJB) = A(DXCB) = (DXCB) = -1$$

Do đó $DGTL$ là tứ giác điều hòa. Điều đó có nghĩa là TQ tiếp xúc với (I).

Vậy $QD = QT$. Kết hợp với $XTD = 180^\circ - KTD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, suy ra $QD = QX$.

Từ đó, theo hệ thức Newton, suy ra $\overline{QB} \cdot \overline{QC} = \overline{QD}^2 = \overline{QL} \cdot \overline{QG}$.

Ta được bốn điểm B, C, G, L cùng thuộc một đường tròn. Điều phải chứng minh.

Câu 3. Cho số nguyên dương n và p là số nguyên tố lẻ. Giả sử $n = qp + r$ với $0 \le r \le p-1$ và q nguyên dương.

Đặt. $S_n = \sum_{k=0}^{qp} (-1)^k . C_{r+k}^r$

a) Khi $p = 3$, chỉ ra một giá trị n nguyên dương lớn hơn 5 sao cho S_n chia hết cho p.

b) Chứng minh rằng nếu p là ước của S_n thì q là số lẻ

Lời giải:

a)Chọn $n = 11$ là được

b) Với $i = 0,1,2,\ldots,q-1$, đặt $A_i = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k . C_{r+ip+k}^r$

Do p lẻ nên $(-1)^{ip} = 1$ nếu i chẵn và $(-1)^{ip} = -1$ nếu i lẻ.

Như vậy ta có thể viết

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{r+k}^r + \sum_{k=p}^{2p-1} (-1)^k C_{r+k}^r + \cdots + \sum_{k=p(q-1)}^{qp-1} (-1)^k C_{r+k}^r + (-1)^{qp} C_{r+qp}^r. \\ &= A_0 - A_1 + \cdots + (-1)^{qp-1} A_{q-1} + (-1)^{qp} C_{r+qp}^r. \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $p > 2$ và $r < p$, ta có với $r \le k$,

$$(k+p)(k+p-1)\cdots(k+p-r+1) \equiv (k)(k-1)\cdots(k-r+1) (\bmod p) \to C_{k+p}^r \equiv C_k^r (\bmod p) \, (2)$$

Từ (2) ta có với $i = 0,1,2,\ldots,q-1$, thì

$$A_i \equiv C_r^r - C_{r+1}^r + \cdots + C_{r+p-1}^r (\bmod p) \to A_i \equiv A_0 (\bmod p).$$

Nếu q chẵn, thay vào (1) ta có $S_n \equiv 1 \quad (\bmod p)$

Vậy q phải là số lẻ.

Câu 4. Tìm tất cả các số $n \in \mathbb{N}$ sao cho có thể phân chia tập $\{1,2,\ldots,3n\}$ thành n tập con 3 phần tử rời nhau $\{a,b,c\}$ sao cho $b-a$ và $c-b$ là các số khác nhau trong tập $\{n-1,n,n+1\}$.

Lời giải:

Xét một đa giác đều $3n$ cạnh $P_1P_2\ldots P_{3n}$ trên một đường tròn. Xét tam giác tạo bởi các đỉnh P_a,P_b,P_c với $b-a$ và $c-b$ là hai số khác nhau trong tập $\{n-1,n,n+1\}$, khi đó nếu $b-a=n-1, c-b=n$ thì $c-a=2n-1$, ta được cung P_aP_b có số đo $\frac{(n-1)2\pi}{3n}$, cung P_bP_c có số đo $\frac{n2\pi}{3n}$, do đó cung còn lại P_cP_a có số đo là $\frac{(n+1)2\pi}{3}$, suy ra ba góc trong tam giác $P_aP_bP_c$ sẽ là $\frac{n-1}{3n}\pi, \frac{n}{3n}\pi$ và $\frac{n+1}{3n}\pi$. Các trường hợp khác cũng tương tự như vậy.

Từ đó, việc phân hoạch tập $\{1,2,\ldots,3n\}$ thoả mãn đề bài tương ứng với việc phân hoạch các đỉnh của một đa giác đều $3n$ cạnh $P_1P_2\ldots P_{3n}$ thành các bộ $\{A_i,B_i,C_i\}$ mà mỗi tam giác $A_iB_iC_i$ có các góc là $\frac{n-1}{3n}\pi, \frac{n}{3n}\pi$ và $\frac{n+1}{3n}\pi$.

Từ đó, luôn có 1 cách đánh số các đỉnh của đa giác đó sao cho A_1,B_1,C_1 là P_n,P_{2n-1},P_{3n} theo thứ tự nào đó.

Hay nói cách khác luôn có thể giả sử 1 trong các bộ của $\{1,2,\ldots,3n\}$ là $X_1 = \{n,2n-1,3n\}$.

Ví dụ: *Với $n=4$, tập $\{n-1,n,n+1\}$ là tập $\{3,4,5\}$, ta có 12 đỉnh $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_{12}$, giả sử phân chia tập $\{1,2,3,\ldots,12\}$ thành các tập $\{1,6,9\}$, $\{3,8,11\}$, $\{2,5,10\}$, $\{4,7,12\}$, hay ứng với các tam giác $P_1P_6P_9, P_3P_8P_{11}, P_2P_5P_{10}, P_4P_7P_{12}$, khi đó tập $\{n,2n-1,3n\}$ chính là tập $\{4,7,12\}$.*

Nhưng nếu phân hoạch khác đi, như $\{1,5,8\}$, $\{2,6,11\}$, $\{3,7,10\}$, $\{4,9,12\}$ thì ta được các tam giác $P_1P_5P_8, P_2P_6P_{11}, P_3P_7P_{10}, P_4P_9P_{12}$, nghĩa là không gặp bộ $\{4,7,12\}$, (cách nhau $7-4=3, 12-7=5$, tức là trùng hợp với bộ $\{5,8,1\}$ (vị trí của 1 giống như vị trí thứ 13), nhưng giờ ta bố trí lại các điểm $P_1,P_2,\ldots,P_{12}$ thành $Q_1,Q_2,\ldots,Q_{12}$ mà $Q_4=P_5, Q_5=P_6,\ldots,Q_7=P_8,\ldots,Q_{12}=P_1$, khi đó ta lại gặp bộ $Q_4Q_7Q_{12}$.

Một trong $n-1$ tập còn lại phải chứa 2 số trong $[2n,3n-1]$ (có n số). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 số trong đó thuộc cùng 1 tập, nhưng hiệu 2 số đó không vượt quá $3n-1-2n=n-1$ nên hai số đó phải là $2n$ và $3n-1$, nên bộ tiếp theo phải là $X_2=\{2n,3n-1,n\}$ hoặc $X_2=\{2n,3n-1,n-1\}$, nhưng $n \in X_1$ nên ta được $X_2 = \{n-1,2n,3n-1\}$.

Bây giờ còn lại $n-2$ tập và các phần tử $\{1,2,\ldots,n-2,n+1,n+2,\ldots,2n-2,2n+1,\ldots,3n-2$, nhưng vì $n-2-1=n-3, 2n-2-(n+1)=n-3, 3n-2-(2n+1)=n-3$ nhỏ hơn $n-1$ nên trong 1 tập không thể có 2 phần tử thuộc cùng 1 tập trong 3 tập $[1,n-2],[n+1,2n-2]$ và $[2n+1,3n-2]$.

Tức là mỗi tập con 3 phần tử trong phân hoạch đều chứa 1 số trong mỗi tập $[1,n-2],[n+1,2n-2]$ và $[2n+1,3n-2]$.

Giả sử phân hoạch $\{a,b,c\}$ thoả mãn $a\in[1,n-2],b\in[n+1,2n-2],c\in[2n+1,3n-2]$ và $b-a,c-b$ là 2 số phân biệt trong tập $\{n,n-1,n+1\}$, ta xét tương ứng $(a,b,c)\to(a,b-2,c-4)\ =(A,B,C)$

Ta được phân hoạch $\{A,B,C\}$ mà $B-A=b-a-2,C-B=c-b-2$ là 2 số khác nhau thuộc tập $\{n-2,(n-2)-1,(n-2)+1\}$. Tức là nếu muốn có phân hoạch ban đầu thoả mãn đề bài, ta cần có 1 phân hoạch tương tự thoả mãn đề bài ứng với N, cho tập $\{1,2,\ldots,3N\}$ với $N=n-2$.

Cứ như vậy, nếu n lẻ ta cần có phân hoạch cho tập chỉ gồm 3 phần tử $\{1,2,3\}$ mà hiệu 2 phần tử phải là $\{0,1,2\}$, điều này là không thể do số 0. Tức là n lẻ không thoả mãn.

Tuy nhiên với n chẵn, $n=2m$ chẵn thì bộ $(2i-1,2i+n,2i+2n-1)$ và $(2i,2i+n-1,2i+2n)$ với $i=1,\ldots,m$ thoả mãn đề bài

Bình luận:

Tại sao lại cần đoạn lập luận chỗ đa giác ở phía trên? Hãy thử quan sát 1 cách suy nghĩ mà ban đầu tôi cũng nghĩ đến, một cách tự nhiên như sau:

Các tập chứa số 1 chỉ có thể là $\{1,n,2n\},\{1,n,2n+1\},\{1,n+1,2n\},\{1,n+1,2n+2\},\{1,n+2,2n+1\}$ *hoặc* $\{1,n+2,2n+2\}$.

Với trường hợp 1, tập chứa số 1 là $A_1=\{1,n,2n\}$ *thì ta có các phần tử của tập* $S=\{2n+1,2n+2,\cdots,3n\}$ *(* n *phần tử) phải thuộc* $n-1$ *tập còn lại.*

Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại 2 số trong tập S *thuộc cùng 1 tập trong* $n-1$ *tập tập đó. Nhưng, với hai số* x,y *bất kỳ thuộc* S *thì* $|x-y|\le 3n-(2n+1)=n-1$, *nên* $2n+1$ *và* $3n$ *thuộc cùng một tập. Thế thì phần tử còn lại phải là* $(2n+1)-n$ *hoặc* $(2n+1)-(n+1)$ *tức là* $n+1$ *hoặc* n *. Nhưng số* n *đã thuộc tập* A_1 *nên chắc chắn có 1 tập thứ 2 là* $A_2=\{n+1,2n+1,3n\}$.

Bây giờ chỉ còn các phần tử $\{2,3,\cdots,n-1,n+2,n+3,\cdots,2n-1,2n+2,2n+3,\cdots,3n-1\}$ *và chia vào* $n-2$ *tập.*

Tức là ta có cơ hội để làm việc với số N *mới bằng* $n-2$, *với số phần tử bớt đi thành* $3N=$, *nên đang có cơ hội quy nạp lùi. Trong trường hợp này, thì chia thành các phần* $[2,n-1],[n+2,2n-1],[2n+2,3n-1]$ *là có thể xử lý như trên.*

Tuy vậy, sang trường hợp thứ 2, $A_1=\{1,n,2n+1\}$ *thì phức tạp hơn nhiều và phải chia thành nhiều trường hợp hơn, nhưng cách xử lý vẫn tương tự được. Vì thế phải nghĩ cách để đỡ phải xét quá nhiều trường hợp, và đó là cách kéo về đa giác như trên.*