SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

Ngày 7 tháng 9 năm 2019

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CẤP TRƯỜNG

NĂM HỌC 2019 - 2020

MÔN TOÁN – 12

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1. (1,5 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases}$

Câu 2. **(2,0 điểm)** Cho dãy số (a_n) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $3a_{n+1} \geq a_n$ và $6a_{n+1} + a_{n-1} \leq 5a_n \; \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz \geq 2$.

Câu 4. **(1,5 điểm)** Cho dãy số nguyên (a_n) thỏa mãn: với mọi p nguyên tố và k nguyên dương thì

$a_{pk+1} = pa_k - 3a_p + 13$. Tính a_{2019}

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) qua B và C cắt các đoạn thẳng CA và AB lần lượt tại E và F. Gọi BE cắt CF tại H. M là trung điểm BC và tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt nhau tại I. Gọi S là hình chiếu của A trên IH và D là giao của IH với BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SMD tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 6. (1,0 điểm)

Điền vào mỗi ô của bảng vuông 7×7 các số tự nhiên từ 1 đến 49 như hình vẽ. Mỗi lần, được phép chọn 1 ô của bảng và đồng thời tăng số trong ô đó thêm 1 rồi giảm mỗi số trong hai ô nào đó kề với nó đi 1, hoặc giảm số trong ô đó đi 1 và tăng mỗi số trong hai ô kề với nó thêm 1 (hai ô kề nhau là hai ô chung cạnh). Hỏi có thể đưa tất cả các số trong bảng về bằng nhau sau một số hữu hạn bước được hay không?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. (1,5 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = -2 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $x^2 \le 1, 2y - y^2 = 1-(y-1)^2 \ge 0 \leftrightarrow (y-1)^2 \le 1$

Ta có $(1) \leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y^2 + 2$

$\leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1)$

Xét $f(x) = x^3 - 3x$ thì $f'(x) = 3x^2 - 3 \le 0 \forall x \in [-1,1]$ và $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = \pm 1$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-1,1]$

Mà $x, y-1 \in [-1,1]$ nên $f(x) = f(y-1) \leftrightarrow x = y-1$

Thay vào phương trình (2) ta được $x^2 + 2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-x^2} = 0 \leftrightarrow x^2 + 2 = 2\sqrt{1-x^2}$

Bình phương hai vế $x^4 + 4x^2 + 4 = 4(1-x^2) \leftrightarrow x^4 + 8x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$.

Đối chiếu điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy $(x, y) = (0,1)$ là nghiệm của phương trình

Câu 2. **(2,0 điểm)** Cho dãy số (a_n) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $3a_{n+1} \ge a_n$ và $6a_{n+1} + a_{n-1} \le 5a_n \; \forall n \ge 2, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải:

- Nếu $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho $a_N \ge 0$, ta có $3^k a_{N+k} \ge a_N \ge 0$ với mọi k nguyên dương hay $a_n \ge 0 \forall n \ge N$

Lại có: $6a_{n+1} \le 6a_{n+1} + a_{n-1} \le 5a_n \to 0 \le a_n \le \left(\frac{5}{6}\right)^n a_0$.

Ta được $\lim a_n = 0$ theo nguyên lý kẹp.

(1,0 điểm)

- Nếu $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, thì $3a_{n+1} \ge a_n \to 0 \ge a_n \ge \left(\frac{1}{3}\right)^n a_0$ nên cũng theo nguyên lý kẹp thì $\lim a_n = 0$

Vậy $\lim a_n = 0$

(1,0 điểm)

Câu 3. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+10xyz\geq 2$.

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geq 0 \leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz\geq x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$

$$\leftrightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz+9xyz\geq (x+y+z)(xy+yz+zx) \leftrightarrow x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\geq 2(xy+yz+zx)$$

$$\leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2(xy+yz+zx)-\frac{9xyz}{x+y+z} \leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2(1-2xyz)-\frac{9xyz}{x+y+z}$$

Vậy chỉ cần chứng minh $10xyz+2-4xyz-\frac{9xyz}{x+y+z}\geq 2 \leftrightarrow 6xyz-\frac{9xyz}{x+y+z}\geq 0 \leftrightarrow x+y+z\geq\frac{3}{2}$

Lại có $xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}$ và $xyz\leq\frac{1}{27}(x+y+z)^3$

Đặt $t=x+y+z$, $t>0$. Từ giả thiết có

$$\frac{2}{27}t^3+\frac{t^2}{3}\geq 1 \leftrightarrow (2t-3)(t+3)^2\geq 0 \leftrightarrow t\geq\frac{3}{2}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng chẳng hạn khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Câu 4. **(1,5 điểm)** Cho dãy số nguyên (a_n) thỏa mãn: với mọi p nguyên tố và k nguyên dương thì

$$a_{pk+1}=pa_k-3a_p+13.$$

Tính a_{2019}

Lời giải:

Xét hai số nguyên tố q và p bất kỳ. Theo giả thiết thì

$$a_{pq+1}=pa_q-3a_p+13 \ (1) \text{ và } a_{pq+1}=qa_p-3a_q+13 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $pa_q-3a_p=qa_p-3a_q \leftrightarrow (p+3)a_q=(q+3)a_p$ (3)

(0,5 điểm)

Trong (3)

Cho $p=3$ và $q=2$, ta được $5a_3=6a_2 \leftrightarrow a_3=\frac{6}{5}a_2$

Cho $p=2, q=7$ ta được $5a_7=10a_2 \leftrightarrow a_7=2a_2$

Trong (1), cho $p=2, q=3$ được $a_7=2a_3-3a_2+13 \leftrightarrow 2a_2=\frac{12}{5}a_2-3a_2+13$ suy ra $a_2=5$

(0,5 điểm)

Mà từ (3) với mọi p nguyên tố thì $a_p=\frac{p+3}{5}.a_2$ nên $a_p=p+3$

Vậy $a_{2019}=a_{2.1009+1}=1009.a_2-3a_{1009}+13=1009.5-3(1009+3)+13$

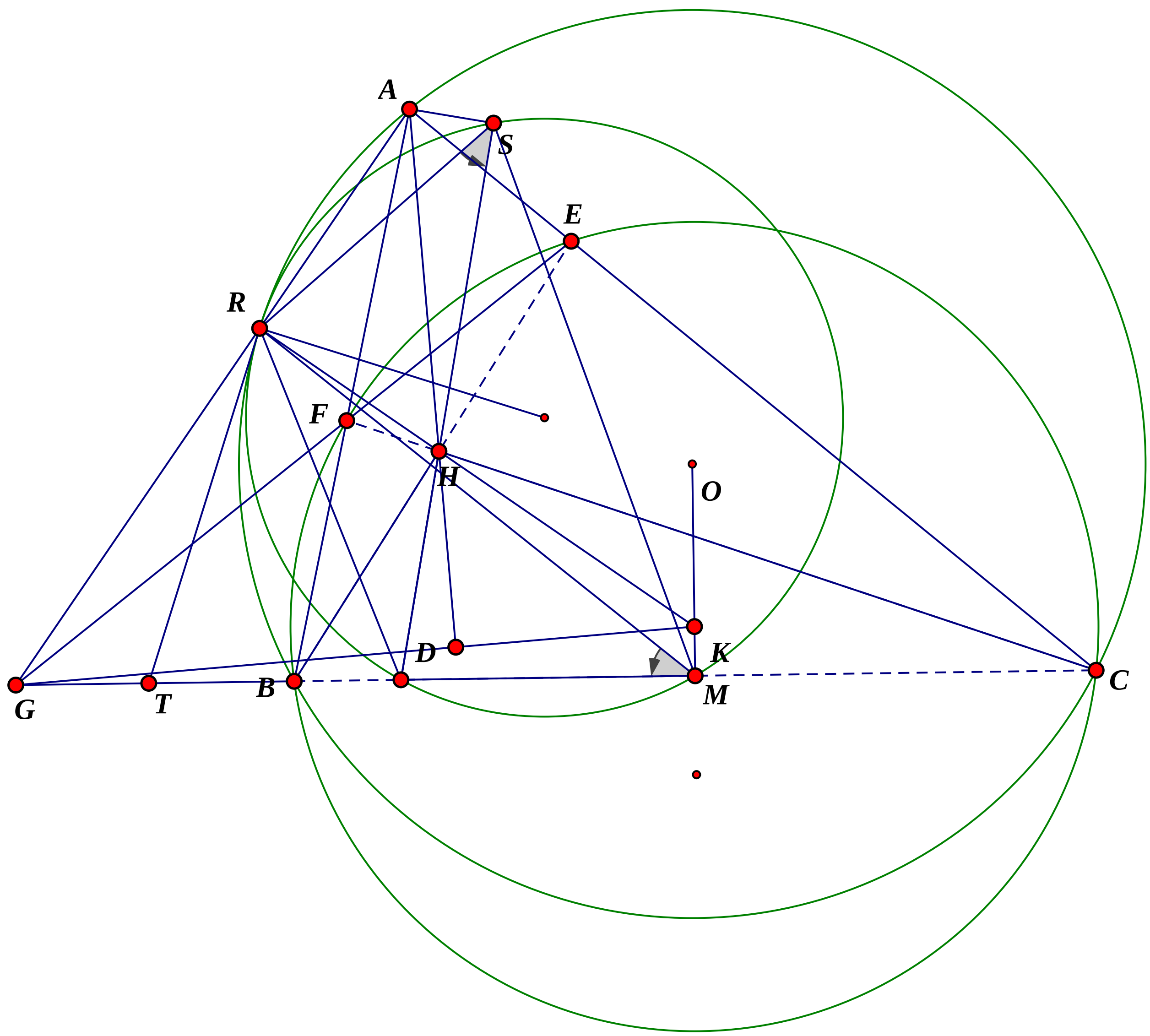
Hay $a_{2019}=8094$

Đáp số $a_{2019}=8094$

(0,5 điểm)

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) qua B và C cắt các đoạn thẳng CA và AB lần lượt tại E và F. Gọi BE cắt CF tại H. M là trung điểm BC và tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt nhau tại I. Gọi S là hình chiếu của A trên IH và D là giao của IH với BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SMD tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải:



Gọi EF cắt BC tại G. Từ định lý Brocard thì H là trực tâm tam giác KAG, hơn nữa giao điểm R của AG và AH là điểm Miquel của tam giác ABC với E,F,G thẳng hàng.

Vậy R và S cùng thuộc đường tròn đường kính AH. Mà tứ giác RKMG nội tiếp đường tròn đường kính GK nên $\angle RMD = \angle RKG = \angle RAH = \angle RSH = \angle RSD$

Từ đó RSMD là tứ giác nội tiếp, tức là (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác (SMD) có điểm chung là R. Ta chứng minh chúng tiếp xúc nhau tại R.

(1,0 điểm)

Thật vậy, kẻ tiếp tuyến tại R của đường tròn (O) cắt BC tại T thì $\frac{TB}{TC} = \frac{RB^2}{RC^2}$

Lại có $KH.KR = KB^2 = KC^2$ nên tam giác HBK đồng dạng tam giác BRK và tam giác HCK đồng dạng tam giác CRK. Ta được $\frac{HB}{RB} = \frac{HK}{BK} = \frac{HK}{CK} = \frac{HC}{RC}$

Suy ra $\frac{TB}{TC}=\frac{HB^2}{HC^2}$ hay TH tiếp xúc với đường tròn (HBC).

Lại có HD là đường đối trung của tam giác HBC ứng với điểm H nên $(B,C,D,T)=-1$, ta được $TR^2=TB.TC=TD.TM$, tức là TR tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMS.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DMS tiếp xúc với đường tròn (O). Điều phải chứng minh.

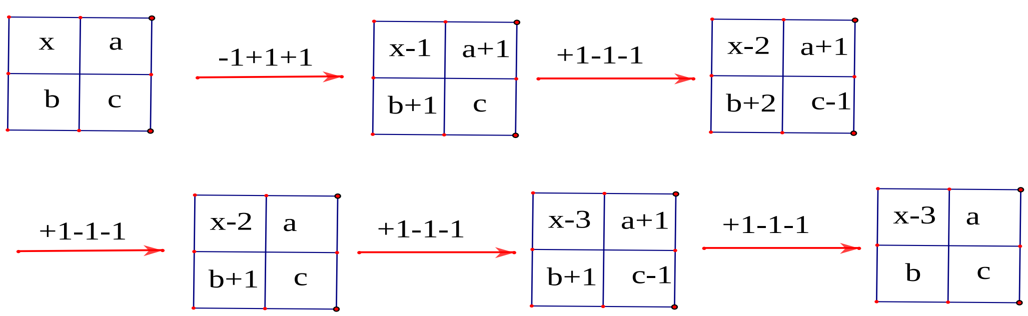
(1,0 điểm)

Câu 6.

Điền vào mỗi ô của bảng vuông 7×7 các số tự nhiên từ 1 đến 49 như hình vẽ. Mỗi lần, được phép chọn 1 ô của bảng và đồng thời tăng số trong ô đó thêm 1 rồi giảm mỗi số trong hai ô nào đó kề với nó đi 1, hoặc giảm số trong ô đó đi 1 và tăng mỗi số trong hai ô kề với nó thêm 1 (hai ô kề nhau là hai ô chung cạnh). Hỏi có thể đưa tất cả các số trong bảng về bằng nhau sau một số hữu hạn bước được hay không?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Lời giải: Câu trả lời là có thể. Xét quy trình sau:



Nhận thấy, sau một quy trình như vậy, ta có thể giảm số trong một ô đi 3 đơn vị mà không làm ảnh hưởng đến các ô khác. Lưu ý rằng vị trí của x,a,b,c có thể thay đổi cho nhau để x có thể ở bất kỳ góc nào trong 4 góc của một hình vuông 2×2 như trên.

(0,5 điểm)

Vậy sau một số hữu hạn bước, ta có thể chuyển bảng về chỉ còn các số 0,1,2 như hình vẽ sau

1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1

Xét bảng 6×6 ở phía dưới bên trái, gồm 4 hình vuông 3×3 giống nhau

2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0

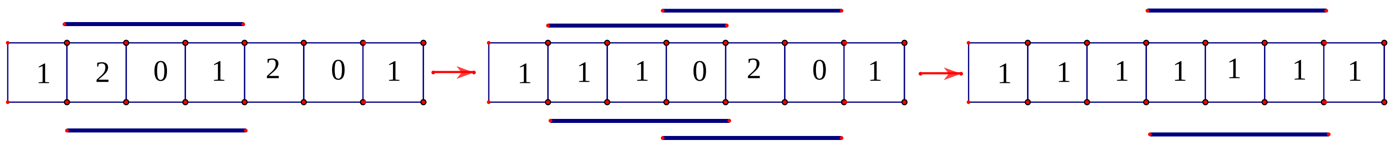
Bằng các thao thác với các ô 2×2 trên cùng bên trái và dưới cùng bên phải của mỗi ô 3×3 đó như sau

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{-1+1+1} \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix} \xrightarrow{+1-1-1} \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

Ta thu được bảng hầu hết là số 1.

1	2	0	1	2	0	1
1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Bây giờ xử lý nốt hàng trên cùng



Tương tự với cột ngoài cùng.

Vậy, ta có thể đưa tất cả về thành số 1.

(0,5 điểm)