1. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathscr{F}$ là một họ các tập hợp con của một tập n phần tử X. Khi đó $\mathscr{F}$ được gọi là họ **giao** nếu với mọi $A,B \in \mathscr{F}$ ta có $A \bigcap B \neq \emptyset$.

Định lý 1.2. *Cho $\mathscr{F}$ là một họ giao của một tập n phần tử X. Khi đó $|\mathscr{F}| \leq 2^{n-1}$.*

Chứng minh. Lấy một tập con $A \subseteq X$. Khi đó với mỗi cặp tập con $(A, X\backslash A)$ của X, thì nhiều nhất là một trong hai tập A hoặc $X\backslash A$ thuộc vào $\mathscr{F}$ (*vì nếu cả hai tập $A, X\backslash A$ đều thuộc vào $\mathscr{F}$ thì do*

$$A \cap (X\backslash A) = \emptyset$$

mâu thuẫn với $\mathscr{F}$ là một họ giao các tập con của X). Vì X có 2^n tập con, và mỗi cặp tập con $(A, X\backslash A)$ có nhiều nhất một tập thuộc $\mathscr{F}$. Do đó

$$|\mathscr{F}| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

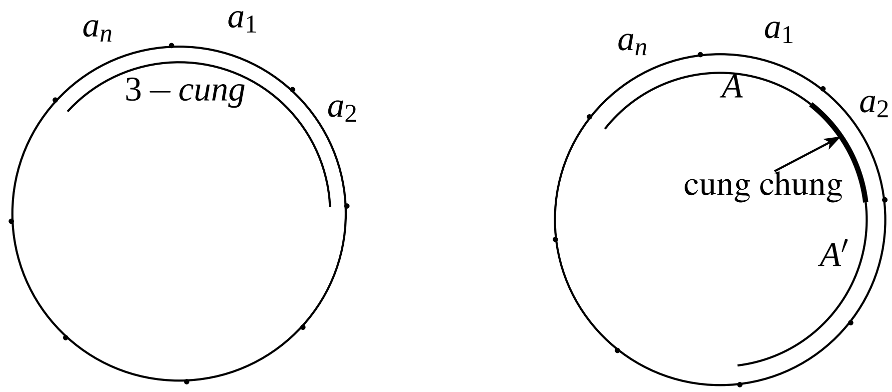
□

Định lý 1.3 (Định lý Erdos-Ko-Rado). *Một họ $\mathscr{F}$ các k_tập (một tập hợp có k phần tử gọi là k_tập) của một tập n phần tử X ($k \leq \frac{n}{2}$). Khi đó*

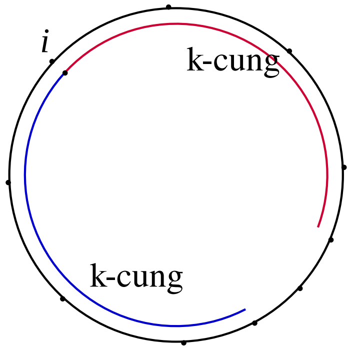
$$|\mathscr{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Chứng minh.

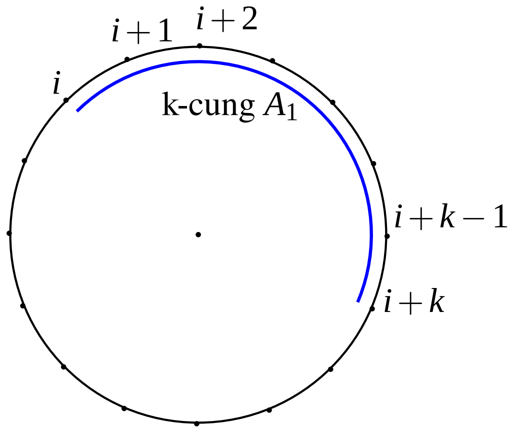
1. Với n, k là các số nguyên dương với $n \geq 2k$. Một k_cung là một tập $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$, với các số nguyên lấy theo modulo n. Một cách hình dung cho một k_cung như là k **đoạn cung tròn** liên tiếp, nối hai điểm i và $i+k(\mod n)$ trên đường tròn. Ta nói hai cung A và A' *giao nhau* nếu chúng có chung nhau một đoạn cung tròn (*k_cung* và hai cung giao nhau được minh họa bởi hình dưới đây).



2. Một họ $\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ các k_cung giao nhau đôi một của $[n]$ thì $t \leq k$. Thật vậy, mỗi điểm i (điểm gắn cho một cung tròn) là điểm kết thúc của hai cung: một cung nhận i là điểm đầu tiên và một cung nhận i là điểm cuối cùng.



Do hai cung này không giao nhau, dẫn đến ***nhiều nhất một trong hai cung này thuộc vào họ*** $\mathscr{F}$. Xét một cung A_1 cho trước. Vì các cung còn lại đều phải giao với A_1 một đoạn cung chung. Do đó các cung còn lại phải nhận một trong các điểm trong của cung A_1, là các điểm $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$, là điểm kết thúc. Vì mỗi điểm kết thúc có không quá một k_cung thuộc $\mathscr{F}$, nên có $k-1$ điểm kết thúc sẽ có không quá k_cung thuộc $\mathscr{F}$, cộng với cung A_1 thì có không quá k_cung thuộc tập $\mathscr{F}$.



3. Bây giờ xét **một** hoán vị của $[n]$ có dạng $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ta đánh dấu các đoạn cung tròn bởi các số a_i như hình vẽ ban đầu. Mỗi một tập của $\mathscr{F}$ xem như là một k_cung ***của hoán vị này***. Theo kết quả trên, thì với một hoán vị này ta có $\leq k$ các k_cung.

   - Lấy tổng hết tất cả các hoán vị $[n]$ trên đường tròn, có $(n-1)!$ hoán vị, thì ta thấy có nhiều nhất là $k(n-1)!$ các tập như thế này.
   - Tuy nhiên, khi sắp xếp trên đường tròn và trong cách đếm trên, tập A_1 được đếm làm nhiều lần (vì sắp xếp trên đường tròn, thì tập A_1 hay bất kỳ tập nào lấy để làm thứ tự là giống nhau). Vì trong nhiều lần hoán vị của $(n-1)!$, sẽ tạo ra những hoán vị khác nhau, nhưng phần tử của A_1 vẫn như vậy. Do đó có $k!$ cách sắp xếp các phần tử của A_1 và $(n-k)!$ cách sắp xếp các phần tử bù của tập A_1. Do đó

$$|\mathscr{F}|k!(n-k)! \leq k(n-1)!$$
$$\Rightarrow |\mathscr{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

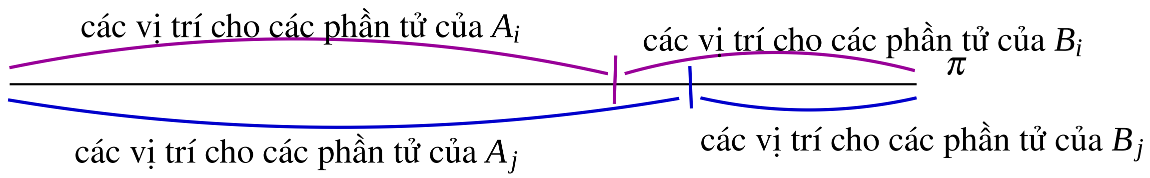
Định lý 1.4 (Bollobas). *Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ và $B_1, B_2, \ldots, B_m$ là các tập con của $S = [n]$. Đặt $a_i = |A_i|$ và $b_i = |B_i|$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$. Giả sử $A_i \cap B_j = \emptyset$ khi và chỉ khi $i = j$. Khi đó*

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

Chứng minh.

1. Với mỗi hoán vị trong số $n!$ hoán vị các phần tử của S, ta nói một hoán vị π là ***chứa** B **sau** A* nếu tất cả các phần tử của A đều *đứng trước* các phần tử của B trong π.

2. Với một hoán vị π có tính chất chứa B_i sau A_i, mà cũng có thêm tính chất chứa B_j sau A_j, khi đó $A_i \cap B_j = \emptyset$ (nếu A_i đứng trước B_j, minh họa hình dưới)



hoặc $A_j \cap B_i = \emptyset$ (khi A_i kết thúc sau B_j). Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $A_i \cap B_j = \emptyset$ khi và chỉ khi $i = j$. Do đó, *với mỗi hoán vị π, tồn tại **nhiều nhất một** chỉ số i để π* chứa B_i sau A_i.

3. Ngược lại, với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ta đếm số hoán vị mà A_i đứng trước B_i.

   - Chọn $a_i + b_i$ ví trí để sắp xếp cho A_i và B_i, ta có $\binom{n}{a_i + b_i}$ cách.
   - Đặt a_i phần tử của A_i vào a_i vị trí đầu tiên trong $a_i + b_i$ ví trí vừa chọn có $a_i!$ cách, sau đó sắp xếp b_i các phần tử của B_i vào các vị trí còn lại có $b_i!$ cách. Vậy có $a_i!.b_i!$ cách sắp xếp A_i trước B_i.
   - Sắp xếp $n - a_i - b_i$ phần tử còn lại của S vào $n - a_i - b_i$ vị trí còn lại có $(n - a_i - b_i)!$ cách.

   Vậy ta có

$$\binom{n}{a_i + b_i} \cdot a_i! \cdot b_i! \cdot (n - a_i - b_i)! = \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}}.$$

4. Lấy tổng số tất các các chỉ số $i = 1, 2, \ldots, m$ ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} \leq n! \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1.$$

   Định lý được chứng minh.

□

Định nghĩa 1.5. Cho S là một tập hợp hữu hạn. Một họ các tập con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của S được gọi là một **xích** nếu

$$A_i \subset A_{i+1} \quad \text{và} \quad |A_{i+1}| = |A_i| + 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Định nghĩa 1.6. Cho P là một tập hợp hữu hạn. Một họ các tập con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của S được gọi là một **phản xích** nếu

$$A_i \not\subset A_j, \forall i \neq j.$$

Định lý 1.7 (Bất đẳng thức LYM, Lubell, Yamamoto, Meshalkin). *Cho F là **một** phản xích trong $[n]$ (ta dùng ký hiệu $[n]$ thay cho $\{1,2,\ldots,n\}$). Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\sum_{a \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Chứng minh. 1. Gọi $\mathscr{C}$ là tập hợp tất cả các **xích** C, mỗi xích C gồm n tập hợp, mỗi tập hợp là một tập con của $[n]$ và đây là *xích* chứa nhiều phần tử nhất, $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n$, $|C_i| = i, \forall i = 1,2,\ldots,n$. Hỏi $\mathscr{C}$ có bao nhiêu phần tử? (*mỗi phần tử thuộc $\mathscr{C}$ là một xích độ dài n*). Xét một xích $C \in \mathscr{C}$ thì

- Có n cách chọn cho tập C_1. Thật vậy, vì $|C_1| = 1$ nên $C_1 \in \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$.
- Với mỗi cách chọn tập C_1, có $n-1$ cách chọn tập C_2. Thật vậy, minh họa cho $C_1 = \{3\}$, khi đó
$$C_2 \in \{\{3,1\},\{3,2\},\{3,4\},\ldots,\{3,n\}\}.$$
- Cứ tiếp tục như vậy, ta có $n-2$ cách chọn tập C_3, $n-3$ cách chọn tập $C_4, \ldots$ và cuối cùng là 1 cách chọn tập C_n vì $C_n = [n]$.

Vậy $\mathscr{C}$ có $n!$ phần tử.

2. Một tập $A \subset [n]$ thì A có thể vừa thuộc vào xích $\mathscr{C}$, vừa thuộc vào *đối xích* F. Do đó ta đi đếm số cặp

$$N = \{(A,C)| \quad \text{với } C \in \mathscr{C} \text{ và } A \text{ là một tập hợp vừa thuộc xích } C \text{ vừa thuộc đối xích } F\}.$$

- Với mỗi $C \in \mathscr{C}$, có nhiều nhất một tập A mà $A \in C$ và $A \in F$. Thật vậy, giả sử có hai tập A_1, A_2 vừa thuộc vào C, vừa thuộc vào F. Vì A_1, A_2 thuộc xích C nên hoặc $A_1 \subset A_2$ hoặc $A_2 \subset A_1$, nhưng khi đó thì A_1, A_2 không thể thuộc vào F được, vì các tập con của F không có tập nào là tập con của tập khác. Vậy
$$|N| \leq n!$$
- Với mỗi tập $A \in F$ mà $|A| = k$. Khi đó có $k!$ cách chọn các tập $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ (cách đếm giống hệ ý 1) mà
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{k-1} \subset A, \quad |A_i| = i, \forall i = 1,2,\ldots,k-1$$
và có $(n-k)!$ cách chọn các tập $A_{k+1}, \ldots A_n$ mà
$$A \subset A_{k+1} \subset \ldots \subset A_n, \quad |A_j| = j, \forall j = k+1, k+2, \ldots, n.$$
Suy ra mỗi $A \in F$ ta có
$$k!(n-k)! = |A|!.(n-|A|)!$$
cách chọn xích C chứa A. Do đó
$$|N| = \sum_{A \in F} |A|!(n-|A|)!.$$

Từ hai cách đếm trên, ta có

$$\sum_{A\in F}|A|!(n-|A|)!\leq n!\Rightarrow \sum_{A\in F}\frac{|A|!(n-|A|)!}{n!}\leq 1$$

đây chính là điều phải chứng minh. □

Nhận xét 1. Bất đẳng thức LYM có thể dễ dàng suy ra từ định lý Bollobas, định lý 1.4 bằng cách, đặt $F=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ và đặt $B_i=[n]\backslash A_i$. Khi đó điều kiện $A_i\cap B_i=\emptyset$ thỏa mãn và điều kiện $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ trở thành $A_i\not\subseteq A_j$, tức là điều kiện của một phản xích. Chú ý là $b_i=n-a_i$. Đến đây thì

$$\sum_{i=1}^{m}\binom{n}{a_i}^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1}\leq 1.$$

Định lý 1.8. *Một họ $\mathscr{F}$ các tập con của tập n phần tử X được gọi là* ***không so sánh được*** *nếu A,B là hai phần tử bất kỳ của $\mathscr{F}$ thì $A\not\subseteq B$.*

Định lý 1.9 (Định lý Sperner). *Cho $\mathscr{F}$ là một họ không so sánh được các tập con của tập n phần tử X. Khi đó*

$$|\mathscr{F}|\leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Chứng minh. Mặt khác, theo tính chất của nhị thức Newton thì hệ số trong khai triển $(1+x)^n$ thỏa tính chất

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\binom{n}{2}<\dots<\binom{n}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}<\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Áp dụng vào ta có

$$\binom{n}{k_j}<\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Thay vào (*) ta có đánh giá

$$m.\frac{1}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}}\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\binom{n}{k_j}}\leq 1.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi B chứa tất cả các tập con gồm có $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ phần tử của tập B. □

Hệ quả 1.10 (Bất đẳng thức Lubell). *Cho $\mathscr{F}$ là một họ không so sánh được các tập con của tập n phần tử X. Gọi a_k là số các k_tập con thuộc $\mathscr{F}$. Khi đó*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{C_n^k}\leq 1.$$

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN CỰC TRỊ TẬP HỢP

2.1. KHOẢNG CÁCH HAMMING - CHẶN PLOTKIN

Cho n là số nguyên dương, ký hiệu

$$[0,1]^n = \{x_1x_2\ldots x_n | x_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n\}$$

là tập tất cả các xâu nhị phân độ dài n.

Định nghĩa 2.1. Cho hai xâu nhị phân $x = x_1\ldots x_n$ và $y = y_1\ldots y_n$. Khi đó khoảng cách giữa hai xâu x và y được định nghĩa là

$$d(x,y) = \text{số vị trí } i \text{ mà } x_i \neq y_i.$$

Khoảng cách này gọi là khoảng cách Hamming thỏa tất cả các điều kiện của một khoảng cách

- $d(x,x) = 0, \forall x \in [0,1]^n$;
- $d(x,y) > 0, \forall x \neq y \in [0,1]^n$;
- $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in [0,1]^n$;
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in [0,1]^n$.

Định nghĩa 2.2. Cho d là số nguyên dương. Gọi C là tập hợp tất các các xâu nhị phân trong $[0,1]^n$ sao cho

$$d(x,y) \geq d, \forall x \neq y \in C.$$

Định lý 2.3 (PLOTKIN). *Cho n,d là các số nguyên dương. Đặt $M = |C|$. Khi đó*

1. *Nếu d chẵn, $2d > n$ thì*
$$M \leq 2\left[\frac{d}{2d-n}\right].$$

2. *Nếu d lẻ, $2d+1 > n$ thì*
$$M \leq 2\left[\frac{d+1}{2d+1-n}\right].$$

Để chứng minh định lý, ta sử dụng một số nhận xét sau:

Bổ đề 2.4. *Giả sử N,M là các số nguyên dương và $0 \leq N \leq M$ thì*

$$N(M-N) \leq \begin{cases} \frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ \frac{M^2-1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Bổ đề 2.5. *Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $[2x] \leq 2[x]+1$.*

Bổ đề 2.6. *Cho v là xâu nhị phân $\in [0,1]^n$. Khi đó $d(v+w)$ bằng với số số 1 xuất hiện trong $v+w$.*

Chứng minh. Bằng việc kiểm tra tất cả các khả năng của v_i và w_i, ta thấy

$$(v+w)_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } v_i = w_i \\ 1 & \text{nếu } v_i \neq w_i. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(v,w) &= |\{i | v_i \neq w_i\}| \\ &= |\{i | (v+w)_i = 1\}|. \end{aligned}$$

□

Chứng minh định lý với d chẵn. Ta viết ma trận $A = \binom{M}{2} \times n$, với mỗi dòng là một phần tử $u+v$, với $u, v \in C$. Ta **đếm số lần xuất hiện số 1 trong ma trận trên.**

1. Ta đếm số lần xuất hiện số 1 trong mỗi cột. Xét một cột j. Lấy một dòng tùy ý, giả sử dòng đó là xâu nhị phân của $u+w$, khi đó số 1 xuất hiện ở cột j nếu và chỉ nếu v và w có một số 1 ở vị trí j, xâu còn lại có số 0 ở vị trí j. Gọi N là số xâu ký tự trong C có số 1 ở vị trí j, khi đó số cách chọn cặp u, w sao cho $v+w$ có số 1 ở vị trí j là $N(M-N)$. Khi đó số số 1 xuất hiện trong cột thứ j là

$$N(M-N) \leq \begin{cases} \frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ \frac{M^2-1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ}. \end{cases}$$

   Điều này đúng cho mọi $j = 1, 2, \ldots, n$. Do đó số số 1 xuất hiện trong ma trận A là

$$\begin{cases} n\frac{M^2}{4} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ n\frac{M^2-1}{4} & \text{nếu } M \text{ lẻ}. \end{cases}$$

2. Ta đếm số lần xuất hiện số 1 trong mỗi dòng. Với một dòng chứa$u+w$. Ta đã biết số số 1 trong dòng đó là $d(v,w)$. Mà theo giả thiết thì $d(v,w) \geq d$. Do đó có ít nhất d số 1 trong mỗi dòng. Do đó số các số 1 trong A ít nhất là

$$\binom{M}{2} \cdot d.$$

Từ đây ta thấy

1. Nếu M **chẵn**. Khi đó kết hợp hai kết quả trên thì

$$\begin{aligned} \binom{M}{2} &\leq n \cdot \frac{M^2}{4} \\ \Rightarrow \frac{dM^2}{2} - \frac{dM}{2} &\leq n \cdot \frac{M^2}{4} \\ \Rightarrow (2d-n)M^2 &\leq 2dM. \end{aligned}$$

   Theo giả thiết thì $2d-n$ và M đều là các số nguyên dương, nên

$$M \leq \frac{2d}{2d-n}.$$

Lại vì M là số nguyên dương nên

$$M \leq \left[\frac{2d}{2d-n}\right] \leq 2\left[\frac{d}{2d-n}\right]+1;$$

mà M chẵn, và $2\left[\frac{d}{2d-n}\right]+1$ lẻ nên

$$M \leq 2\left[\frac{d}{2d-n}\right].$$

2. Nếu M **lẻ**, thì

$$d\cdot\binom{M}{2} \leq n\frac{M^2-1}{4} \Rightarrow d\cdot\frac{M}{2} \leq n\frac{M+1}{4}.$$

Do đó $(2d-n)M \leq n$ nên

$$M \leq \frac{n}{2d-n} = \frac{2d}{2d-n} - 1.$$

Do M là số nguyên, ta được

$$\begin{aligned} M &\leq \left[\frac{2d}{2d-n}-1\right] \\ &= \left[\frac{2d}{2d-n}\right]-1 \\ &\leq 2\left[\frac{d}{2d-n}\right]+1-1 \\ &= 2\left[\frac{d}{2d-n}\right], \end{aligned}$$

tức chúng ta đã có được chặn Plotkin cho d chẵn.

□

Ví dụ 2.1.1 (Vĩnh Phúc 2012). Có 7 em học sinh tham gia vào m nhóm hoạt động ngoại khóa, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều nhóm hoạt động. Biết rằng với hai nhóm tùy ý thì có ít nhất 4 học sinh chỉ **tham gia vào một trong hai nhóm đó**. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của m.

Chứng minh. Gọi bảy học sinh là $a_1, a_2, \ldots, a_7$ và đặt $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$. Ta ***mỗi nhóm là một xâu nhị phân***

$$x_1x_2\ldots x_7,$$

trong đó $x_i = 1$ nếu nhóm đó chứa a_i và $x_i = 0$ nếu nhóm đó không chứa a_i. Xét hai nhóm A, B tùy ý trong số m nhóm, khi đó có ít nhất 4 học sinh, giả sử là a_1, a_2, a_3, a_4. Gọi hai xâu biểu diễn cho A, B là v, w.

- Nếu $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \in A$ thì $a_i \notin B, \forall i = 1,2,3,4$. Khi đó hai xâu có dạng

$$\begin{array}{ccccccccc} v & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{array}$$

Khi đó $d(v,w) \geq 4$.

- Nếu $a_1 \in A, \{a_2, a_3, a_4\} \in B$. Khi đó hai xâu có dạng

$$\begin{array}{cccccccc} v & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ w & 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . \end{array}$$

Khi đó $d(u,v) \geq 4$.

Xét tất cả các trường hợp tương tự, ta luôn có $d(v,w) \geq 4$ với mọi v,w. Vậy $d = 4, n = 7$. Khi đó theo định lý 3.3 thì

$$m \leq 2\left[\frac{4}{2.4-7}\right] = 8.$$

Khi đó $m \leq 8$. Với $m = 8$ ta có một cách xây dựng các nhóm là, với a,b,c,d,e,f,h là 7 học sinh ☐

A_1:	a	b	c				
A_2:	a			d	e		
A_3:	a					f	g
A_4:		b		d		f	
A_5:		b			e		g
A_6:			c	d		f	
A_7:			c		e	f	
A_8:	a	b	c	d	e	f	g

Ví dụ 2.1.2 (China TST 1994). Cho $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập con của $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ sao cho

$$\begin{cases} |A_i| = 5, \forall i = 1, 2, \ldots, k \\ |A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq k. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của k.

Chứng minh. Ta coi mỗi tập con A_t là một xâu nhị phân dạng $x_1 \ldots x_{10}$, trong đó $x_i = 1$ nếu $i \in A_t$ và $x_i = 0$ nếu $i \notin A_t$. Do

$$|A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq k$$

nên suy ra $d(x,y) \geq 6$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} v & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \downarrow \\ w & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(*Giả sử xâu v biểu diễn cho A_i, xâu w biểu diễn cho A_j. Nếu $|A_i \cap A_j| = 2$ thì có hai xâu v,w chỉ có* ***đúng hai số 1 trùng nhau vị trí****. Như hình bên minh họa cho hai số 1 ngoài cùng bên trái. Đối với xâu v còn 3 số 1, tương ứng 3 vị trí đó của xâu w phải là số 0 và ngược lại đối với xâu w còn 3 số 1, tương ứng 3 ví trí đó của xâu v phải là số 0. Trong trường hợp này là $d(v,w) = 6$. Nếu $|A_i \cap A_j| = 1$ hay $A_i \cap A_j = \emptyset$ thì rõ ràng $d(x,y) > 6$.*) Theo định lý 3.3 thì

$$k \leq 2\left[\frac{6}{2.6-10}\right] = 6.$$

Vậy k lớn nhất bằng 6, và dưới đây là một cách xây dựng các tập □

A_1:	1	2	3	4	5					
A_2:		2	3			6	7	8		
A_3:			3	4				8	9	10
A_4:				4	5	6	7		9	
A_5:	1				5	6		8		10
A_6:	1	2					7		9	10

Cách xây dựng 6 tập hợp trên không phải là duy nhất. Dưới đây cũng là 6 tập hợp thỏa mãn

A_1:	1	2	3	4	5					
A_2:	1	2				6	7	8		
A_3:	1		3			6			9	10
A_4:		2		4			7		9	10
A_5:			3		5		7	8		10
A_6:				4	5	6		8	9	

Ví dụ 2.1.3 (PTNK 2012). Cho số nguyên dương n và tập hợp $X = \{1,2,3,\ldots,4n\}$. Hai tập con A,B của X được gọi là **không giống nhau** nếu

$$|A\Delta B| \geq 2n+1,$$

với $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Xét m tập hợp $A_1,A_2,\ldots,A_m$ là các tập con đôi một không giống nhau của X. Chứng minh rằng

$$m \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$

Chứng minh. Ta đồng nhất mỗi tập A_t là một xâu nhị phân độ dài $4n$

$$x_1x_2\ldots x_{4n}$$

với $x_i = 1$ nếu $i \in A_t$ và $x_i = 0$ nếu $i \notin A_t$. Xét hai tập A_i,A_j tùy ý trong m tập, gọi v,w là hai xâu nhị phân biểu diễn của chúng. Do

$$|A\Delta B| \geq 2n+1$$

nên tương tự như ví dụ 3.1 thì
$$d(v,w) \geq 2n+1.$$
Từ đó suy ra $d = 2n+1$. Do $2.d = 4n+2 > 4n$, nên theo định lý 3.3 thì
$$m \leq 2\left[\frac{2n+1+1}{4n+2+1-4n}\right] = 2\left[\frac{2n+2}{3}\right] \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$
□

Ví dụ 2.1.4 (Inspired IMO 1998). Trong một cuộc thi có n thí sinh và p giám khảo, ở đó n, p là các số nguyên dương, $p > 2$. Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử k là số thỏa mãn điều kiện: ***với hai giám khảo tùy ý, số thí sinh mà họ cho kết quả giống nhau nhiều nhất là*** k. Chứng minh rằng
$$\frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

Chứng minh. Giả sử n thí sinh là $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Mỗi giám khảo cho ***tương ứng với một xâu nhịn phân độ dài*** n***:*** $x_1x_2\ldots x_n$ ***với*** $x_i = 1$ ***nếu thí sinh*** S_i ***đỗ và*** $x_i = 0$ ***nếu thí sinh*** S_i ***rớt***. Theo điều kiện bài toán thì $d = n-k$. Xét hai trường hợp

1. Nếu $2(n-k) \leq n$ thì
$$\frac{k}{n} \geq \frac{1}{k} > \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

2. Nếu $2(n-k) > n$, xét hai khả năng xảy ra

   - Nếu $n-k$ chẵn, theo định lý 3.3 thì
$$p \leq 2\left[\frac{n-k}{2(n-k)-n}\right] \leq 2\frac{n-k}{2(n-k)-n} = \frac{2(n-k)}{n-2k}.$$
     Do đó
$$p(n-2k) \leq 2n-2k \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

   - Nếu $n-k$ lẻ, theo định lý 3.3 thì
$$p \leq 2\left[\frac{n-k+1}{2(n-k)+1-n}\right] \leq 2\frac{n-k+1}{2(n-k)+1-n} = \frac{2(n-k+1)}{n-2k+1}.$$
     Do đó
$$p(n-2k+1) \leq 2n-2k+2 \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{p-2}{2(p-1)}.\frac{n+1}{n} > \frac{p-2}{2(p-1)}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

2.2. SỬ DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ TỔ HỢP

Ví dụ 2.2.1. Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 và nhỏ hơn 30. Tìm số k nhỏ nhất sao cho mỗi tập con của A gồm k phần tử đều tồn tại hai số chia hết cho nhau.

Giải. Ta có

$$A = \{1,3,7,9,11,13,17,19,21,23,27,29\}, |A| = 12.$$

Xét tập

$$B = \{9,11,13,17,19,21,23,29\}.$$

Khi đó hai phần tử bất kì thuộc B thì không chia hết cho nhau. Từ đó ta suy ra được $k \geq 9$. Ta chứng minh $k = 9$ thỏa đề bài. Xét S là một tập con bất kì của A và $|S| = 9$. Xét ba cặp $\{21,7\},\{27,9\},\{1,11\}$ ta thấy mỗi cặp là bội của nhau. Nếu trong 3 cặp trên có ít nhất một cặp thuộc S thì bài toán được giải quyết. Giả sử trong ba cặp trên không có cặp nào cùng thuộc S, do $|S| = 9$ nên S phải chứa một số trong mỗi cặp và chứa 6 số còn lại. Từ đó suy ra trong S phải có cặp $\{3,9\}$ hoặc $\{3,27\}$ và mỗi cặp này là bội của nhau. Hay nói cách khác trong S luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau. Vậy $\min k = 9$. □

Nhận xét 2. Mấu chốt trong bài toán trên là chúng ta phát hiện ra tập A_0 để từ đó ta khẳng định được $k \geq 9$ và dự đoán $\min k = 9$. Để tìm tập B, ta liệt kê hết các số trong A mà không có hai số nào là bội của nhau. Với bài toán này, việc tìm ra tập B khá đơn giản.

Ví dụ 2.2.2 (KMO 1990). Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} |A_i| = 30, \forall i = 1,2,\ldots,n \\ |A_i \cap A_j| = 1, \forall i \neq j \\ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh $n < 872$.

Chứng minh.

1. Giả sử $n \geq 872$. Xét tập hợp A_1, $|A_1| = 30$. Do

$$|A_i \cap A_1| = 1, \forall i = 2,3,\ldots,n$$

nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại phần tử $a \in A_1$ thuộc vào ít nhất là

$$\left[\frac{n}{30}\right] + 1 \geq \left[\frac{872}{30}\right] + 1 = 30$$

tập hợp. Không mất tính tổng quát, gọi các tập hợp đó là $A_2, A_3, \ldots, A_{31}$.

2. Vì $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$, nên tồn tại một tập B trong số các tập $A_{32}, \ldots, A_n$ không chứa phần tử a.

3. Xét 31 tập hợp $A_2, A_3, \ldots, A_{31}$ và B với $a \in A_j, \forall j = 2,3,\ldots,30$ và $a \notin B$.

   - Vì $|A_j \cap B| = 1, \forall j = 2,3,\ldots,31$, các tập A_j đều chứa a, còn B không chứa a, nên $\{x_j\} = A_j \cap B$ thì $x_j \in B \backslash \{a\}$.

- Có 31 phần tử $x_2,\ldots,x_{31}$ trong tập $B\backslash\{a\}$, mỗi phần tử trong chúng thuộc vào ít nhất một tập hợp trong 30 tập A_j, $j\in\{2,\ldots,31\}$, nên tồn tại một phần tử x_t, với $t\in\{2,3,\ldots,29\}$ thuộc vào hai tập hợp A_r,A_s $(r,s\in\{2,3,\ldots,31\})$.
- Khi đó $\{a,x_t\}\subset A_r\cap A_s$, mâu thuẫn với giả thiết $|A_r\cap A_s|=1$.

Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 2.2.3 (**China TST1994, Ví dụ 3.1.2**). Cho $A_1,A_2,\ldots,A_k$ là các tập con của $X=\{1,2,\ldots,10\}$ sao cho

$$\begin{cases}|A_i|\geq 5,\forall i=1,2,\ldots,k\\ |A_i\cap A_j|\leq 2,\forall 1\leq i<j\leq k.\end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của k.

Chứng minh. Trong ví dụ 3.1.2 ta đã giải bài toán này bằng chặn Plotkin, và xây dựng được với $k=6$. Do đó $k\geq 6$. Nếu $k\geq 7$, ta trình bày một lời giải kết hợp đếm số tập hợp chứa phần tử và nguyên lý bao hàm loại trừ (inclusion - exclusion principle). Với mỗi $i\in X$, đặt

$$n_i=|\{j\in\{1,2,\ldots,k|i\in A_j\}\}|$$

tức đếm số tập hợp trong $A_1,A_2,\ldots,A_k$ chứa phần tử i. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{10}n_i=\sum_{j=1}^{k}|A_k|\geq 5k=35.$$

Do đó phải tồn tại chỉ số i_0 sao cho $n_{i_0}\geq 4$, vì nếu tất cả $n_i\leq 3$ thì $\sum_{i=1}^{10}n_i\leq 3\times 10=30$, mâu thuẫn với đánh giá trên. Tức là tồn tại một phần tử i_0 trong X thuộc vào ít nhất 4 tập hợp trong k tập $A_1,A_2,\ldots,A_k$. Không mất tính tổng quát, giả sử i_0 thuộc vào 4 tập hợp A_1,A_2,A_3,A_4. Khi đó với mọi $1\leq i<j<t\leq 4$ thì

$$|A_i\cap A_j\cap A_t|\geq |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\geq 1.$$

Theo nguyên lý IE thì

$$\begin{aligned}10=|X|&\geq |A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|\\ &=\sum_{i=1}^{4}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq 4}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<t\leq 4}|A_i\cap A_j\cap A_t|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\\ &\geq 4\times 5-\binom{4}{2}\times 2+\left(\binom{4}{3}-1\right)\times 1=11,\end{aligned}$$

mâu thuẫn. Do đó điều giả sử là sai. Suy ra $k\leq 6$. Vậy $k=6$. □

Ví dụ 2.2.4 (**India Postal Coaching 2014 Set 5 Problem 4, Ví dụ 3.3.3**). Tập M được viết dưới dạng $M=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ và $A_i\cap A_j=\emptyset$ với mọi $1\leq i<j\leq n$, thì các tập $A_1,A_2,\ldots,A_n$ được gọi là một ***n*_phân hoạch** của M. Giả sử $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và $B_1,B_2,\ldots,B_n$ là hai n_phân hoạch của M thỏa mãn

$$|A_i\cup B_j|\geq n,\forall 1\leq i,j\leq n.$$

Chứng minh $|M|\geq\dfrac{n^2}{2}$.

Dưới đây ta trình bày một lời giải khác bằng cách cùng công thức IE.

Chứng minh. Đặt $k = \min\{|A_i| i = 1,2,\dots,n\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $|A_1| = k$. Khi đó

$$|M| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n| \geq n|A_1| \Rightarrow |A_1| \leq \frac{M}{n}.$$

Tương tự đặt $j = \min\{|B_i| i = 1,2,\dots,n\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $|B_1| = j$ và tương tự như đánh giá trên thì

$$|B_1| \leq \frac{M}{n}.$$

Theo giả thiết bài toán thì $|A_1 \cup B_1| \geq n$ nên theo công thức IE thì

$$n \leq |A_1 \cup B_1| = |A_1| + |B_1| - |A_1 \cap B_1| \leq |A_1| + |B_1| \leq \frac{2|M|}{n} \Rightarrow M \geq \frac{n^2}{2}.$$

□

Ví dụ 2.2.5. Cho 2005 tập hợp, mỗi tập hợp có có 44 phần tử. Biết rằng hai tập hợp bất kỳ đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2005 tập hợp đã cho.

Ta cần khẳng định tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2005 tập hợp đã cho. Do đó ta sẽ làm việc với một phần tử x thuộc nhiều tập hợp nhất (vì chỉ có phần tử này mới có cơi hội nhiều nhất thỏa đề bài). Để làm được điều này, ta phải biết được x thuộc bao nhiêu tập hợp. Nếu x thuộc ít hơn 2005 tập hợp, bằng lập luận dẫn đến vô lý.

Giải. Ta có 2005 tập hợp, mỗi tập có 44 phần tử nên có tối đa là 2005×44 phần tử. Với x là một phần tử bất kỳ trong chúng, đặt

$$n_x = \{\textit{số tập hợp} \text{ trong 2005 tập hợp mà chứa phần tử } x\} \in \mathbb{N}.$$

Vì $\{n_x\}_x \subset \mathbb{N}$ là hữu hạn nên **tồn tại phần tử lớn nhất trong chúng**, mà ta giả sử luôn là x. Tức x là phần tử thuộc **nhiều tập hợp nhất**, gọi các tập hợp này là $A_1, A_2, \dots, A_k$. Nếu $k = 2005$ thì bài toán được chứng minh. Giả sử $k < 2005$, tức tồn tại một tập hợp B, *trong số 2005 tập hợp*, không chứa x. Theo giả thiết bài toán

$$x_1 = B \cap A_1 \neq x,$$

$$x_2 = B \cap A_2 \neq x,$$

dễ thấy $x_1 \neq x_2$ vì nếu không thì $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, trong khi đó theo điều kiện bài toán thì $A_1 \cap A_2 = x$, duy nhất. Tương tự ta có B sẽ chứa các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_k$. Tuy nhiên B chỉ chứa đúng 44 phần tử nên $k \leq 44$. Vì mỗi phần tử của B không thuộc quá 44 tập hợp (*vì phần tử x thuộc nhiều tập hợp nhất là k tập hợp mà* $k \leq 44$) nên B có giao khác rỗng với nhiều nhất là

$$44^2 = 1936 < 2004$$

tập hợp, mâu thuẫn với giả thiết B có giao khác rỗng với 2004 tập hợp còn lại.

Vậy điều giả sử là sai, tức $k = 2005$. Bài toán được giải xong. □

Ví dụ 2.2.6. Cho 2014 thùng trái cây, mỗi giỏ trái cây có cả ba loại trái cây Táo, Xoài, Cam. Chứng minh rằng có thể chọn ra được 1008 thùng trái cây, sao cho tổng số Xoài, tổng số Táo, tổng số Cam trong 1008 thùng trái cây này đều lớn hơn một nửa tổng số Xoài, tổng số Táo, tổng số Cam của 2014 thùng trái cây ban đầu.

Chứng minh. Đánh số $A_1, A_2, \cdots, A_{2014}$ là 2014 thùng trái cây đó. Gọi (a_i, b_i, c_i)lần lượt là số táo, xoài, cam trong thùng A_i. Chọn ra 2 thùng A_i, A_j có **số táo và số xoài lớn nhất**. Nếu $i = j$ thì ta chọn thùng A_i và một thùng bất kỳ. Gọi A và B lần lượt là *số táo và số xoài lớn nhất trong 2012 thùng còn lại*. Ta sẽ chứng minh trong 2012 thùng còn lại, có thể chia vào 2 nhóm I, II (mỗi nhóm có 1006 thùng) sao cho

$$\begin{cases} \left|\sum\limits_{i\in I} a_i - \sum\limits_{i\in II} a_i\right| \le A \\ \left|\sum\limits_{i\in I} b_i - \sum\limits_{i\in II} b_i\right| \le B \end{cases}$$

Giả sử $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_{2012}$, ta xét các cặp $X_i = (a_{2i-1}, a_{2i}), (i = 1, 2, \ldots, 1006)$. Với mỗi cặp

$$\begin{cases} a_{2i-1} \in X_i \\ a_{2i} \in X_i \end{cases}$$

ta sẽ cho cặp đó vào 2 nhóm nhau. Khi đó với mọi cách chia thì

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in II} a_i &\le a_1 + a_3 + \cdots + a_{2011} - a_2 - a_4 - \cdots - a_{2012} \\ &= a_1 + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{2011} - a_{2010}) - a_{2012} \le a_1; \\ \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in II} a_i &\ge a_2 + a_4 + \cdots + a_{2012} - a_1 - a_3 - \cdots - a_{2011} \\ &= -a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2010} - a_{2011}) + a_{2012} \ge -a_1. \end{aligned}$$

Nên với mọi cách chia thì

$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in II} a_i\right| \le A.$$

Gọi T là một cách chia như thế. Nếu

$$\left|\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in II} b_i\right| \le B$$

thì chọn cách này. Nếu

$$\left|\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in II} b_i\right| > B$$

không mất tính tổng quát, giả sử

$$\sum_{i\in I} b_i > \sum_{i\in II} b_i \Rightarrow \sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in II} b_i > B.$$

Khi đó tồn tại $j \in I, k \in II$ sao cho $b_j > b_k$. Khi đó ta chỉ việc đổi chỗ (a_j, b_j) từ nhóm I sang nhóm II và (a_k, b_k) từ nhóm II sang nhóm I (cách đổi chỗ này không ảnh hưởng đến điều kiện (1)). Khi đó $\sum\limits_{i\in I} b_i$

sẽ giảm đi ít nhất 1, còn $\sum_{i\in I} b_i$ sẽ tăng lên ít nhất 1. Do đó

$$\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in II} b_i$$

sẽ giảm đi ít nhất là 2. Nếu sau khi đổi chỗ mà thỏa điều kiện (2) thì dừng, nếu chưa thỏa thì tiếp tục làm như trên sẽ đến lúc thỏa vì hiệu trên giảm ngặt trên tập số nguyên dương. Vậy ta luôn chia được thành 2 nhóm sao cho

$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in II} a_i\right| \le A$$

$$\left|\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in II} b_i\right| \le B.$$

Trong hai nhóm I và II, thì tổng số cam trong mỗi nhóm đã được xác định, nên ta sẽ chọn được nhóm nào số số cam nhiều hơn. Giả sử nhóm I. Khi đó thêm 2 thùng đã lấy ra cho vào nhóm I, thì số cam lấy ra lớn hơn 1 nửa và

$$-A \le \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in II} a_i \le A \Rightarrow \sum_{i\in II} a_i \le \sum_{i\in I} a_i + A,$$

tức số Táo thỏa mãn điều kiện. Tương tự kiểm tra cho số Xoài. □

Ví dụ 2.2.7. Cho X là một tập hợp hữu hạn, $|X| = n$ và $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập con của X thỏa mãn

$$|A_i| \ge 2, \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{và} \quad |A_i \cap A_j| \ne 1, \forall 1 \le i < j \le m.$$

Chứng minh rằng có thể tô các phần tử của X bằng hai màu, mỗi phần tử tô một màu, sao cho mọi tập A_i đều chứa các phần tử được tô cả hai màu.

Chứng minh. 1. Giả sử $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Giả sử kết luận bài toán sai. Trong tất cả các cách tô màu mỗi phần tử của tập X, chọn cách ***tô được một tập con cực đại*** của X, giả sử $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} (k < n)$ thỏa mãn bài toán theo nghĩa: nếu thêm phần tử x_{k+1} vào Y thì không thể tô màu cho x_{k+1} được để thỏa mãn bài toán.

2. Điều đó dẫn đến sẽ có hai tập, giả sử là A_r, A_s chứa x_{k+1} và $A_r, A_s \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ sao cho

- Nếu x_{k+1} được tô màu xanh thì $A_r \cap Y$ gồm toàn các phần tử màu xanh;
- Còn nếu x_{k+1} được tô màu đỏ thì $A_s \cap Y$ gồm toàn các phần tử màu đỏ.

Nhưng khi đó thì $A_r \cap A_s = \{x_{k+1}\}$, mâu thuẫn với giải thiết bài toán. Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh.

□

Ví dụ 2.2.8 (2000 Hungarian-Israeli). Đặt $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Nếu A và B là hai tập con của S, ta ký hiệu $|A|$ và $|B|$ là số phần tử trong tập A và tập B tương ứng. Giả sử rằng

$$|A|.|B| \ge 3999.$$

Chứng minh rằng khi đó hai tập hợp $A - A$ và $B - B$ chứa ít nhất một phần tử chung. Ký hiệu

$$X - X = \{s - t, s \in X \text{ và } t \in X, s \ne t\}.$$

Giải. Đặt $T = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ thì

$$|T| = |A|.|B| \geq 3999.$$

Tập $W = \{a+b | a \in A, b \in B\}$ là một tập con của tập $\{2,3,\dots,4000\}$. Nếu $W = \{2,3,\dots,4000\}$ thì vì hai số 2 và 4000 đều nằm trong W nên suy ra cả hai tập A và B đều chứa hai số 1 và 2000. Suy ra hai tập $A-A$ và $B-B$ đều có một phần tử chung là 1999.

Nếu $W \neq \{2,3,\dots,4000\}$ thì W có ít hơn 3999 phần tử. Theo nguyên lý Dirichlet, phải tồn tại hai cặp $(a,b) \neq (a',b')$ trong T để

$$a+b = a'+b' \implies a-a' = b-b'.$$

Khi đó hai tập hợp $A-A$ và $B-B$ đều chứa chung một phần tử là $a-a' = b-b'$. Ta có điều phải chứng minh. □

2.3. THIẾT LẬP ÁNH XẠ GIỮA CÁC TẬP HỢP

Ví dụ 2.3.1 (Italy 2000). Cho X là một tập hợp hữu hạn với $|X| = n$, và đặt $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập con chứa 3 phần tử của X thỏa mãn $|A_i \bigcap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$. Chứng tỏ tồn tại tập con A của X chứa ít nhất $[\sqrt{2n}]$ phần tử mà không nhận bất cứ tập $A_i (i = 1,2,\dots,m)$ nào là tập con của nó.

Giải.

1. *Để tập A không chứa bất kỳ tập A_i nào làm tập con, thì lẽ tự nhiên tập A chứa càng ít phần tử càng tốt.*

2. *Tuy nhiên đề bài lại yêu cầu $|A| \geq \sqrt{2n}$, tức một chặn dưới cho $|A|$. Nghĩa là đề bài yêu cầu tồn tại tập A có số lượng phần tử "tương đối" nhiều. Để làm việc với những tập tương đối nhiều phần tử, thông thường ta làm trên tập có nhiều phần tử nhất.* Giả sử A **là một tập con của** X **mà không chứa bất kỳ một tập** A_i **nào, với số phần tử lớn nhất**. Đặt $k = |A|$.

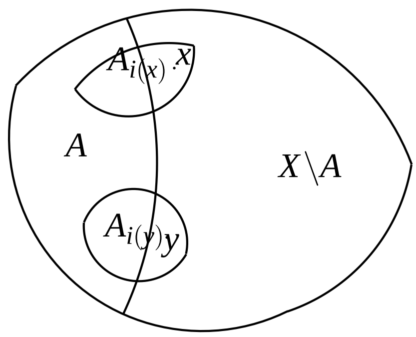
   - *Ý nghĩa như sau: bất kỳ tập con nào của X có số phần tử $> k$, sẽ đều chứa một tập con A_i nào đó.*

   - *Do đó ta sẽ khảo cứu những tập vi phạm sinh ra từ A, những tập đó bằng tập A thêm một phần tử ngoài A, tức thêm vào A một phần tử của tập $X \setminus A$.*

3. Cách 1. Vì $|A|$ chứa k phần tử nên $X \setminus A$ có $n-k$ phần tử.

4. Cách 2. Xét x là một phần tử của X nhưng không thuộc A, $x \in X \setminus A$. Theo tính tối đại của tập A, thì $A \bigcup \{x\}$ sẽ không thỏa mãn điều kiện bài toán. Nghĩa là sẽ tồn tại một chỉ số $i(x) \in \{1,2,\dots,m\}$ sao cho

$$A_{i(x)} \subseteq A \bigcup \{x\}.$$



Vì $A_{i(x)} \not\subset A$ và $A_{i(x)} \subseteq A \bigcup \{x\}$ nên $x \in A_{i(x)}$. Từ đó suy ra

$$A_{i(x)} \backslash \{x\} \subset A.$$

Vì mỗi tập A_i có ba phần tử nên $A_{i(x)} \backslash \{x\}$ chỉ có hai phần tử, mà nó lại là tập con của A, dẫn đến tập

$$L_x = A \bigcap A_{i(x)}$$

có đúng hai phần tử. Lại theo giả thiết bài toán $|A_i \bigcap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$ nên các tập L_x đều là các tập phân biệt (*theo nghĩa, hai tập hợp L_x và L_y , ở đây $x \neq y$ thuộc $X\backslash A$ thì $L_x \neq L_y$. Vì nếu $L_x = L_y$, giả sử $L_x = L_y = \{a,b\}$. Khi đó $\{a,b\} \subset A_x, \{a,b\} \subset A_y$, dẫn đến $A_x \bigcap A_y = \{a,b\}$, mâu thuẫn*).

5. Từ đó chúng ta đã xác lập được một **đơn ánh** từ tập $X\backslash A$ đến *tập hợp chứa các tập hai phần tử* của A. Do đó theo tính chất đơn ánh thì

$$n-k \leq \binom{k}{2} = \frac{k^2-k}{2} \Longrightarrow k^2+k \geq 2n \Longrightarrow k \geq \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} > \sqrt{2n}-1.$$

Vì k nguyên và $k > \sqrt{2n-1}$ nên $k \geq [\sqrt{2n}]$.

□

Ví dụ 2.3.2 (AMM, E3459). Cho X là một tập hợp, $|X| = n \geq 12$ và $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ là họ các 4_tập của X sao cho

$$|A_i \cap A_j| \geq 2, \forall i \neq j \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một tập con S của S, $|S| \geq \sqrt[3]{6n-6}$ sao cho $A_i \not\subset S, \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

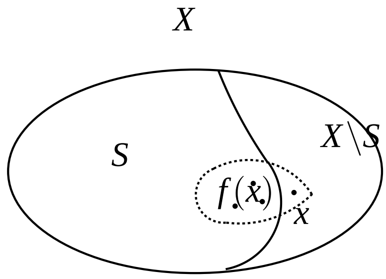
Chứng minh. 1. Ta gọi một tập con T của X là một tập *độc lập* nều

$$A_i \not\subset T, \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

2. Xét S là tập độc lập có kích thước ***lớn nhất*** trong X, đặt $|S| = k$. Khi đó $k \geq 3$. Vì S lớn nhất, nên với mỗi phần tử $x \in X\backslash S$, sẽ *tồn tại* một 3_tập $f(x) \subseteq S$ sao cho

$$f(x) \cup \{x\} \in F.$$

(vì nếu mọi tập B chứa 3 phần tử trong S mà $B \cup \{x\} \notin F$ thì ta bổ sung x và S và được tập $S \cup \{x\}$ cũng là tập độc lập, mâu thuẫn với tính lớn nhất của S).



3. Lấy $x_1 \neq x_2$ (x_1, x_2 thuộc $X \backslash S$). Theo kết quả trên, tồn tại hai tập chứa 3 phần tử $f(x_1), f(x_2)$ trong S sao cho
$$f(x_1) \cup \{x_1\} \in F, \quad f(x_2) \cup \{x_2\} \in F.$$
Rõ ràng $f(x_1) \neq f(x_2)$, vì nếu $f(x_1) \equiv f(x_2)$. Khi đó hai tập $A_1 = f(x_1) \cup \{x_1\}, A_2 = f(x_2) \cup \{x_2\}$ có
$$|A_1 \cap A_2| = |f(x_1)| = 3$$
mâu thuẫn giả thiết.

4. Từ trên ta thấy f là một đơn ánh từ $X \backslash S$ vào các tập con chứa 3 phần tử của S. Do đó
$$|X \backslash S| \leq |S| \Leftrightarrow n - k \leq \binom{k}{3}.$$
Từ đây suy ra
$$6n \leq 6\binom{k}{3} + 6k = k^3 - 3k^2 + 8k \leq k^3 - 3 \Rightarrow k \geq \sqrt[3]{6n+3}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Ví dụ 2.3.3 (India Postal Coaching 2014 Set 5 Problem 4). Tập M được viết dưới dạng $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $1 \leq i < j \leq n$, thì các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một n**_phân hoạch** của M. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là hai n_phân hoạch của M thỏa mãn
$$|A_i \cup B_j| \geq n, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$
Chứng minh $|M| \geq \dfrac{n^2}{2}$.

Chứng minh. Đặt $k = \min\{|A_i|, |B_j|, 1 \leq i, j \leq n\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $|A_1| = k$.

1. Do $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các tập con phân biệt. Và $|A_1| = k$, nên ***có nhiều nhất*** k tập B_j trong $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ mà $A_1 \cap B_j \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại ***ít nhất*** $n - k$ tập B_j trong $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ mà $A_1 \cap B_j = \emptyset$.

2. Giả sử trong các tập $B_1, B_2, \ldots, B_n$ có ***chính xác*** m tập B_j mà $A_1 \cap B_j \neq \emptyset$, khi đó $m \leq k$. Không mất tính tổng quát, gọi m tập đó là $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Khi đó $n - m$ tập $B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots, B_n$ còn lại có $A_1 \cap B_j = \emptyset, \forall j = m+1, m+2, \ldots, n$.

3. Vì $B_j \cap A_1 = \emptyset, \forall j = m+1, m+2, \ldots, n$, lại theo giả thiết $|B_j \cup A_1| \geq n, \forall j = m+1, m+2, \ldots, n$. Chứng tỏ
$$|B_j| \geq n - |A_1| = n - k, \forall j = m+1, \ldots, n.$$

4. Theo định nghĩa của k thì
$$|B_j| \geq |A_1| = k, \forall j = 1, 2, \ldots, m.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |M| &= |B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| \\ &= \underbrace{|B_1| + \cdots + |B_m|}_{m \text{ tập}} + \underbrace{|B_{m+1}| + \cdots + |B_n|}_{n-m \text{ tập}} \\ &\geq m \times k + (n-m) \times (n-k) \\ &= n(n-k) - m(n-2k). \end{aligned}$$

- Nếu $n \geq 2k$, thì $n - 2k \geq 0$. Do $m \leq k$ nên

$$|M| \geq n(n-k) - k(n-2k) = \frac{n^2}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq \frac{n^2}{2}.$$

- Nếu $n < 2k$, khi đó

$$|M| = |B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + \cdots + |B_n| \geq n \times k > \frac{n^2}{2}.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Ví dụ 2.3.4. Cho A_i là các tập hợp hữu hạn, với $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng nếu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i|.|A_j|} < 1,$$

thì tồn tại $a_i \in A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ để $a_i \neq a_j, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

Chứng minh. Đặt $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $T = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Xét ánh xạ $f : S \to T$ sao cho: với mỗi $i \in S$ thì $f(i) \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Gọi M là tập hợp tất cả các ánh xạ như vậy. Khi đó

$$|M| = |A_1|.|A_2| \ldots |A_n|.$$

Ta chứng minh có ít nhất một đơn ánh trong M. Nếu $f \in M$ mà không là đơn ánh, khi đó tồn tại $i, j \in S, i \neq j$ sao cho $f(i) = f(j)$. Với ánh xạ f như vậy, thì $f(i) = f(j)$ nhận nhiều nhất là $|A_i \cap A_j|$ giá trị khác nhau, và $f(k)$ $(k \neq i, j)$ nhận nhiều nhất là $|A_k|$ giá trị khác nhau. Do đó với $i, j \in S (i \neq j)$, số ánh xạ f mà $f(i) = f(j)$ nhiều nhất là

$$|A_i \cap A_j| \cdot \prod_{k=1, k \neq i, j}^{n} |A_k| = \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i|.|A_j|}.|M|.$$

Từ đó suy ra số ánh xạ trong M mà không phải là đơn ánh nhiều nhất là

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{|A_i\cap A_j|}{|A_i|.|A_j|}.M<|M|.$$

Từ đó suy ra tồn tại ít nhất một đơn ánh $f_0\in M$. Đặt

$$f_0(i)=a_i(i=1,2,\ldots,n).$$

Khi đó $a_i\in A_i(i=1,2,\ldots,n)$ và do f_0 đơn ánh nên $i,j\in S(i\neq j)$ thì

$$a_i=f_0(i)\neq f_0(j)=a_j.$$

□

Ví dụ 2.3.5 (Iran 1999). Cho n là số nguyên dương và tập hợp $X=\{1,2,\ldots,n\}$. Các tập $A_1,A_2,\ldots,A_k$ là các tập con của X sao cho với mọi $1\leq i_1,i_2,i_3,i_4\leq n$ ta có

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\cup A_{i_4}|\leq n-2.$$

Chứng minh rằng $k\leq 2^{n-2}$.

Chứng minh. Một tập con $T\subset X$ được gọi là $2-$phủ nếu $T\subseteq A_i\cup A_j$ với i,j thuộc $\{1,2,\ldots,k\}$ (i,j không nhất thiết phân biệt). Trong số tất cả các tập con của X không bị $2-$phủ, ta chọn ra tập có số lượng phần tử ***nhỏ nhất***. Gọi đó là tập A.

1. Xét họ tập hợp $S_1=\{A\cap A_1,A\cap A_2,\ldots,A\cap A_k\}$ (ở đây $A\cap A_i$ có thể trùng $A\cap A_j$, nếu xảy ra điều này ta bỏ khỏi tập S_1 những tập trùng nhau). Vì A ***không phải*** $2-$phủ nên nếu $X\in S_1$ thì $A\backslash X\notin S_1$ (thật vậy, giả sử cả X và $A\backslash X\in S_1$, khi đó

   $$X=A\cap A_r,\quad A\backslash X=A\cap A_s$$

   với r,s thuộc $\{1,2,\ldots,k\}$. Nhưng khi đó thì

   $$A=X\cup(A\backslash X)=(A\cap A_r)\cup(A\cap A_s)=A\cap(A_r\cup A_s)\Rightarrow A\subseteq A_r\cup A_s,$$

   mâu thuẫn với A không là $2-$phủ.) Như vậy có không quá một nửa số tập con của A nằm trong S_1. Do đó

   $$|S_1|\leq 2^{|A|-1}.$$

2. Bây giờ lấy $B=X\backslash A$ (dĩ nhiên B sẽ là $2-$phủ, vì $|B|>|A|$), lại xét tiếp tập hợp

   $$S_2=\{B\cap A_1,B\cap A_2,\ldots,B\cap A_k\}.$$

   Khi đó nếu $X\in S_2$ thì $B\backslash X\notin S_2$. Thật vậy, giả sử cả hai tập X và $B\backslash X$ đều nằm trong S_2. Khi đó

   $$X=B\cap A_p\quad B\backslash X=B\cap A_q$$

   thì

   $$B\subseteq A_p\cup A_q.$$

Theo tính nhỏ nhất của $|A|$, suy ra bất kỳ tập nào có $< |A|$ phần tử sẽ là $2-$phủ. Do đó với $m \in A$ thì

$$A \backslash \{m\} = A_c \cup A_d$$

với $c, d \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Khi đó

$$|A_c \cup A_d \cup A_p \cup A_q| \geq |B \cup (A \backslash \{m\})| = |X \backslash \{m\}| = n - 1,$$

mâu thuẫn với giả thiết. Từ đây, tương tự lập luận trên, cũng suy ra

$$|S_2| \leq 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}.$$

3. Mặt khác, mỗi tập A_i xác định duy nhất bởi $(B \cap A_i) \cup (A \cap A_i)$. Do đó

$$k \leq |S_1|.|S_2| \leq 2^{|A|-1}.2^{n-|A|-1} = 2^{n-2}.$$

□

2.4. ĐẾM SỐ TẬP HỢP CHỨA PHẦN TỬ - ĐẾM HAI CÁCH

Ví dụ 2.4.1 (PUTNAM 1980). Cho $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ là các tập con của tập hữu hạn X sao cho $|A_i| > \dfrac{1}{2}|X|$, với mọi $1 \leq i \leq 1066$. Chứng minh rằng tồn tại 10 phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ của X sao cho mọi tập $A_j (j \in \overline{1, 1066})$ đều chứa ít nhất một phần tử trong mười phần tử này.

Chứng minh. Bài toán chỉ xét khi $|X| \geq 10$. Đặt $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, với $m = |X|$.

1. Với mỗi t ($t \in \{1, 2, \ldots, m\}$), đặt

$$n_t = |\{j \in \{1, 2, \ldots, 1066\} | x_t \in A_j\}|$$

tức n_t đếm số tập hợp A_j chứa phần tử x_t. Khi đó

- n_1 đếm số tập hợp A_j chứa phần tử x_1;
- n_2 đếm số tập hợp A_j chứa phần tử x_2;
- ....;
- n_m đếm số tập hợp A_j chứa phần tử x_m.

Do đó

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{1066}| > 1066 \cdot \frac{m}{2} = 533m.$$

Từ đây suy ra có một số n_i, không mất tính tổng quát giả sử là n_1, mà $n_1 > 533$. Tức là ta có *hơn một nửa tập hợp trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ chứa phần tử x_1.*

2. Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_s$ là các tập hợp trong số các tập A_i mà ***không chứa phần tử*** x_1. Ta có

$$\boxed{s = 1066 - n_1 \leq 532}.$$

Đặt $Y = X\setminus\{x_1\} = \{x_2,\ldots,x_m\}$. Ngoài ra

$$|B_i| = |A_i| > \frac{1}{2}m > \frac{1}{2}(m-1) = \frac{1}{2}|Y|.$$

Với mỗi t ($t \in \{2,\ldots,1066\}$), đặt

$$k_t = |\{j \in \{1,2,\ldots,s\} | x_t \in B_j\}|$$

tức k_t đếm số tập hợp B_j chứa phần tử x_t. Khi đó

$$k_2 + k_3 + \cdots + k_m = |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_s| > s\cdot\frac{m-1}{2} = \frac{s}{2}.(m-1).$$

Vế trái là tổng của $m-1$ số, do đó phải tồn tại một k_i, không mất tính tổng quát giả sử k_2 sao cho $k_2 > \frac{s}{2}$. Nghĩa là có *hơn một nửa tập hợp trong số* $B_1, B_2, \ldots, B_s$ *chứa phần tử* x_2.

3. Đến đây lại đặt $C_1, C_2, \ldots, C_r$ là các tập hợp trong số các tập B_j mà ***không chứa phần tử*** x_2. Ta có

$$\boxed{r = s - k_2 < s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} \le \frac{532}{2} = 265}.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta lại chỉ ra được $> \frac{r}{2}$ (hơn một nửa trong số các tập $C_1, \ldots, C_r$) chứa phần tử x_3. Ta lại chỉ ra được một dãy tập hợp $D_1, D_2, \ldots, D_u$ với $\boxed{u < \frac{r}{2} = 132}$ không chứa phần tử x_4.

4. Cứ tiếp tục quá trình này ở lần thứ 5 đến lần thứ 10, mỗi dãy sẽ không nhiều hơn 65, 32, 15, 7, 3, và 1. Do đó ta nhận được các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 2.4.2 (China 1996, Romania 1994). Cho 11 tập hợp $M_i, i = 1,2,\ldots,11$ thỏa mãn

$$\begin{cases} |M_i| = 5, \forall i = 1,2,\ldots,11 \\ M_i \cap M_j \neq \emptyset, \forall 1 \le i < j \le 11. \end{cases} \qquad (I)$$

Gọi m là số nguyên dương lớn nhất sao cho tồn tại các tập $M_{i_1}, \ldots, M_{i_m}$ trong số 11 tập trên để

$$\bigcap_{k=1}^{m} M_{i_k} \neq \emptyset.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của m trên tất cả cách chọn 11 tập hợp M_i thỏa mãn (I).

Chứng minh. Đặt $X = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$. Với mỗi $x \in X$, đặt

$$n_x = |\{j \in \{1,2,\ldots,11\} | x \in M_j\}|$$

và $m = \max\{n_x | x \in X\}$. Khi đó

$$\sum_{x\in X} n_x = |M_1| + |M_2| + \cdots + |M_{11}| = 55.$$

Theo giả thiết thì $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ với mọi $1 \le i < j \le 11$.

- Có $\binom{11}{2}$ cách chọn ***giao khác rỗng***, mỗi cách chọn giao khác rỗng là một cách chọn một cặp tập hợp M_i, M_j trong số 11 tập $M_1, M_2, \ldots, M_{11}$;
- Mặt khác, mỗi phần tử x xuất hiện trong $\binom{n_x}{2}$ ***giao khác rỗng*** của các tập M_i, M_j.

Do đó

$$\sum_{x\in X}\binom{n_x}{2} \geq \binom{11}{2} = 55.$$

Do đó

$$\sum_{x\in X}\frac{n_x(n_x-1)}{2} \geq 55.$$

Vì $n_x \leq m, \forall x \in X$, do đó

$$55 \leq \sum_{x\in X}\frac{n_x(n_x-1)}{2} \leq \frac{m-1}{2}\sum_{x\in X} n_x = \frac{m-1}{2}.55 \Rightarrow \frac{m-1}{2} \geq 1 \Rightarrow m \geq 3.$$

Nếu $m = 3$, khi đó dấu bằng phải xảy ra trong tất cả các bất đẳng thức trên, nên $n_x = m = 3, \forall x \in X$. Nhưng $\sum_{x\in X} n_x = 55$ không chia hết cho 3, nên n_x không thể bằng 3 với mọi giá trị của $x \in X$. Từ đây suy ra $m \geq 4$.
Tiếp theo ta chứng minh $m = 4$ thỏa mãn. Xét

$$\begin{array}{cccc} a & b & b & d \\ e & f & g & h \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Khi đó 11 tập M_i được lấy như sau:

- 4 tập **dòng**

$$M_1 = \{a,b,c,d,D\}, \quad M_2 = \{e,f,g,D\}, \quad M_3 = \{1,2,3,4,D\}, \quad M_4 = \{5,6,7,8,D\}.$$

- 4 tập **cột**

$$M_5 = \{a,e,1,5,C\}, \quad M_6 = \{b,f,2,6,C\}, \quad M_7 = \{c,g,3,7,C\}, \quad M_8 = \{d,h,4,8,C\}.$$

- 3 tập **đường chéo**

$$M_9 = \{a,f,3,8,D\}, \quad M_{10} = \{b,g,4,5,D\}, \quad M_{11} = \{c,h,1,6,D\}.$$

(*Mỗi tập trên đều lấy trên mỗi dòng, mỗi cột đúng một phần tử*) □

Ví dụ 2.4.3 (USAMO 2011). Cho $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ là các hợp sao cho

$$\begin{cases} |A_i| = 45, \forall 1 \leq i \leq 11 \\ |A_i \cap A_j| = 9, \forall 1 \leq i < j \leq 11. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}| \geq 165$ và cho một ví dụ với trường hợp dấu bằng xảy ra.

Chứng minh. Đặt $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{11}$, với mỗi $x \in X$, đặt

$$n_x = |\{j \in \{1,2,\ldots,11\} | x \in A_j\}|.$$

Khi đó

$$\sum_{x \in X} n_x = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{11}| = 11 \times 45 = 495.$$

- Có $\binom{11}{2}$ cách chọn hai tập giao khác rỗng A_i, A_j trong số 11 tập $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$.
- Mặt khác, mỗi phần tử x xuất hiện trong $\binom{n_x}{2}$ giao khác rỗng của các tập A_i, A_j.

Theo giả thiết thì $|A_i \cap A_j| = 9$ với mọi $1 \le i < j \le 11$ nên mỗi tập giao của hai tập A_i, A_j thì mỗi phần tử được đếm lặp 9 lần. Do đó

$$\sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} = 9 \times \binom{11}{2} = 495.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{x \in X} n_x = \sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} \Rightarrow n_x = 3, \forall x \in X.$$

Mặt khác

$$\sum_{x \in X} n_x = \sum_{x \in X} \binom{n_x}{2} = 495 \Rightarrow \sum_{x \in X} n_x^2 = 3 \times 495$$

Đặt $n = |X|$, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz thì

$$\left(\sum_{x \in X} 1.n_x\right)^2 \le \left(\sum_{x \in X} 1\right)\left(\sum_{x \in X} n_x^2\right) \Rightarrow 495^2 \le n \times 3 \times 495 \Rightarrow n \ge 165.$$

Để kết thúc bài toán, ta chỉ ra một thuật xây dựng. *Coi 11 tập hợp là 11 mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$, trong đó không có hai mặt phẳng nào song song với nhau. Khi đó ba mặt phẳng tùy ý cắt nhau tại một điểm. Tổng số giao điểm đạt được là*

$$\binom{11}{3} = 165$$

là các điểm trong tập X. □

Ví dụ 2.4.4 (USA TST 2005). Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Với mỗi số nguyên dương m, đặt $X_m = \{1,2,\ldots,mn\}$. Giả sử tồn tại một họ $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2n}\}$ gồm $2n$ tập con của X_m sao cho

1. $|A_i| = m, \forall i = 1,2,\ldots,2n$;
2. $|A_i \cap A_j| \le 1, \forall 1 \le i < j \le 2n$;
3. Mỗi phần tử của X_m đều nằm trong đúng hai tập hợp thuộc $\mathscr{F}$.

Tìm giá trị lớn nhất của m theo n.

Chứng minh. Với mỗi $i \in X_{mn}$, đặt

$$n_i = |\{j \in \{1,2,\ldots,2n\} | i \in A_j\}|.$$

Khi đó, theo giả thiết thứ 3 thì $n_i = 2, \forall i = 1,2,\ldots,mn$. Mặt khác, sử dụng giả thiết thứ 2 thì

$$\sum_{i=1}^{mn} \binom{n_i}{2} = \sum_{1\le i<j\le mn} |A_i \cap A_j| \le \sum_{1\le i<j\le mn} 1 = \binom{2n}{n}.$$

Từ đây suy ra

$$mn \le \binom{2n}{2} \Rightarrow m \le 2n-1.$$

Mặt khác, ta lấy $2n$ đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$, trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Tổng số giao điểm của các cặp đường thẳng này là

$$\binom{2n}{2} = n(2n-1) = n.m$$

là các phần tử của X_{mn}. Khi đó mỗi tập A_i chứa $2n-1$ giao điểm trên đường thẳng i. Nhận thấy các tập A_i thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy giá trị lớn nhất của n là $2m-1$. ☐

Ví dụ 2.4.5. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho tồn tại n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} |A_i| = 4, \forall i = 1,2,\ldots,n \\ |A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \le i < j \le n \\ |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n. \end{cases}$$

Chứng minh.

1. Đặt $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Với mỗi $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, đặt

   $$n_i = |j \in \{1,2,\ldots,n\} | i \in A_j|.$$

   Khi đó ta có

   $$\sum_{i=1}^{n} n_i = |A_1| + \cdots + |A_n| = 4n. \quad (*)$$

   Dẫn đến với mỗi i, thì ***trung bình*** nó xuất hiện trong 4 tập hợp A_j.

2. Giả sử tồn tại một phần tử, không mất tính tổng quát, giả sử là 1 nằm trong ***nhiều hơn 4 tập hợp***. Không mất tính tổng quát, giả sử là $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

   - Vì $|A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \le i < j \le 5$ và ta luôn có $A_i \cap A_j = \{1\}, \forall 1 \le i < j \le 5$, nên $3 \times 5 = 15$ phần tử còn lại của các tập A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 phải khác nhau.
   - Ngoài ra 1 không thể nằm trong tất cả các tập hợp $A_1, \ldots, A_n$, vì nếu không áp dụng lập luận trên thì

     $$3 \times n = 3n$$

     phần tử còn lại trong các tập $A_1, \ldots, A_n$ phải phân biệt. Nhưng khi đó thì

     $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = 3n + 1 > n,$$

     mâu thuẫn.

- Do đó tồn tại một tập hợp trong $A_6,\dots,A_n$ không chứa phần tử 1. Giả sử $A_6 = capA_i$ $(i = 1,2,\dots,5)$ là các tập phân biệt. Nếu ngược lại, giả sử

$$A_6 \cap A_1 = A_6 \cap A_2 = \{b\}$$

thì $b \neq 1$ do $1 \notin A_6$. Nhưng khi đó thì $b \in A_1, b \in A_2$, mâu thuẫn với ý đầu tiên. Từ đây dẫn đến tập A_6 phải có ít nhất 5 phần tử, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy mỗi phần tử nằm trong không quá 4 tập hợp. Ngoài ra nếu có một phần tử nào đó nằm trong ít hơn 4 phần tử, theo (*) phải có một phần tử nằm trong ≤ 4 tập hợp, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy một phần tử ***xuất hiện trong đúng 4 tập hợp*** A_j.

3. Giả sử 1 nằm trong A_1,A_2,A_3,A_4. Khi đó, giả sử

$$A_1 = \{1,2,3,4\},\quad A_2 = \{1,5,6,7\},\quad A_3 = \{1,8,9,10\},\quad A_4 = \{1,11,12,13\}.$$

Khi đó $n \geq 13$.

4. Nếu $n \geq 14$ thì phần tử 14 nằm trong một tập hợp, giả sử A_5. Khi đó 3 phần tử còn lại của A_5 sẽ nằm trong các tập A_1,A_2,A_3. Dẫn đến A_5 và A_4 không có phần tử chung, mâu thuẫn.

5. Vậy n lớn nhất là 13, và dưới đây là 13 tập hợp thỏa mãn

$$A_1 = \{1,2,3,4\},\quad A_2 = \{1,5,6,7\},\quad A_3 = \{1,8,9,10\},\quad A_4 = \{1,11,12,13\},$$

$$A_5 = \{2,5,8,11\},\quad A_6 = \{2,6,9,12\},\quad A_7 = \{2,7,10,13\},\quad A_8 = \{3,5,10,12\},$$
$$A_9 = \{3,6,8,13\},\quad A_{10} = \{3,7,9,11\},\quad A_{11} = \{4,5,9,13\},\quad A_{12} = \{4,6,10,11\},$$
$$A_{13} = \{4,7,8,12\}.$$

□

Ví dụ 2.4.6 (China 1999). Cho n nguyên dương và X là một tập hợp với $|X| = n$. Gọi $A_1,A_2,\dots,A_n$ là các tập con của X sao cho
$$|A_i| \geq 2, \forall i = 1,2,\dots,n.$$
Giả sử rằng với mỗi tập con $A' \subset X$, $|A'| = 2$ thì tồn tại duy nhất một chỉ số i sao cho

$$A' \subseteq A_i.$$

Chứng minh rằng
$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Chứng minh. 1. Vì mỗi tập con, giả sử $\{a,b\}$ của X thì tồn tại duy nhất một chỉ số i sao cho $\{a,b\} \subseteq A_i$ và mỗi tập con chứa hai phần tử của A_i thì không thể là tập con của một tập A_j nào khác. Do đó
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{|A_i|}{2} = \binom{n}{2}. \quad (1)$$

2. Đặt $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}X$, ký hiệu
$$n_i = |\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} | x_i \in A_j\}|.$$
Khi đó
$$\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \quad (2)$$
Mặt khác
   - Mỗi phần tử $x_i \in X$ sẽ nằm trong n_i tập hợp. Do đó mỗi phần tử x_i sẽ xuất hiện trong $\binom{n_i}{2}$ ***tập giao***.
   - Xét một tập giao, giả sử $\{x_i, x_t\} = A_r \cap A_s$. Khi đó cả x_i và x_t đều được tính trong tập giao này. Do đó
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \binom{n_i}{2} = \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|}. \quad (3)$$
3. Theo giả thiết bài toán, thì $|A_i \cap A_j| \le 1$. Và ***kết luận bài toán cần chứng minh*** $|A_i \cap A_j| = 1$. Khi đó (3) trở thành
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n_i}{2} = \binom{n}{2}.$$
Từ đây theo (1), (2) và đẳng thức trên ta được
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{|A_i|}{2} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n_i}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
dẫn đến kết luận bài toán đưa về chứng minh
$$\sum_{i=1}^{n} n_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|^2. \quad (*)$$
4. Với mỗi phần tử $x_i \in X$, xét tập A_j mà $x_i \notin A_j$. Giả sử $A_j = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$. Khi đó mỗi tập hợp chứa 2 phần tử sau đây
$$\{x_i, y_1\}, \{x_i, y_2\}, \ldots, \{x_i, y_s\}$$
là tập con của các tập, chẳng hạn $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (lưu ý không thể xảy ra $\{x_i, y_1\}, \{x_i, y_2\}$ cùng thuộc vào một tập, chẳng hạn A_1. Vì khi đó $\{y_1, y_2\}$ cũng là tập con của A_1, mâu thuẫn với giả thiết. Điều này đúng cho tất cả các tập còn lại). Từ đây suy ra x_i thuộc vào $s = |A_j|$ tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (dĩ nhiên x còn thuộc vào một số tập khác nữa). Điều này chứng tỏ nếu $x_i \notin A_j$ thì
$$n_i \ge |A_j| \Rightarrow \frac{n_i}{n - n_i} \ge \frac{|A_j|}{n - |A_j|}.$$
5. Số tập hợp A_j không chứa x_i là $n - n_i$. Do đó
$$\sum_{j | x_i \notin A_j} \frac{n_i}{n - n_i} = (n - n_i) \cdot \frac{n_i}{n - n_i} = n_i.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} n_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{n_i}{n-n_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n-|A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n-|A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} |A_j|.\end{aligned}$$

Nhưng theo (2) đẳng thức phải xảy ra trong ước lượng trên. Do đó $n_i = |A_j|$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n-n_i)n_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} d_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} (n-|A_j|)|A_j|\end{aligned}$$

từ đó (*) được chứng minh. Bài toán kết thúc.

□

2.5. XÂY DỰNG - QUY NẠP - TRUY HỒI

Ví dụ 2.5.1. Cho n nguyên dương và tập hợp $M = \{1,2,\ldots,20\}$. Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập con phân biệt khác rỗng của M sao cho

$$|A_i \cap A_j| \leq 2, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Tìm giá trị lớn nhất của n.

Chứng minh. 1. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập con của M thỏa mãn điều kiện bài toán. Nếu một trong các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ có ít nhất 4 phần tử, không mất tính tổng quát, giả sử $|A_1| \geq 4$. Gọi a là một phần tử trong A_1.

- Khi đó $A_1 \backslash \{a\}$ là tập có ít nhất ba phần tử. Do $|A_1 \cap A_i| \leq 2, \forall i = 2,3,\ldots,n$ nên tập $A_1 \backslash \{a\}$ phải phân biệt với tất cả các tập $A_2, \ldots, A_n$ (*vì nếu $A_1 \backslash \{a\} \equiv A_i$ nào đó, thì*

$$A_1 \backslash \{a\} \cap A_i = A_1 \backslash \{a\}$$

có ít nhất ba phần tử. Khi đó $A_1 \cap A_i$ cũng có ít nhất ba phần tử, vô lý.)

- Ngoài ra
$$|(A_1\backslash\{a\})\cap A_j| \le |A_1\cap A_j| \le 2, \forall j = 2,3,\ldots,n.$$

2. Từ các kết quả trên, nếu thay A_1 bởi $A_1\backslash\{a\}$ thì hệ tập hợp
$$A_1\backslash\{a\}, A_2, A_3, \ldots, A_n$$
vẫn thỏa mãn bài toán. Hệ mới này có cùng số tập hợp với hệ ban đầu, nhưng số phần tử trong mỗi tập hợp ≤ 1 so với số phần tử trong mỗi tập hợp của hệ ban đầu. *Cứ tiếp tục quá trình này, ta thu được dãy tập hợp $A_1^*, \ldots, A_n^*$ thỏa mãn bài toán và*
$$|A_i^*| \le 3, \forall i = 1,2,\ldots,n$$
Tức là các tập hợp này, mỗi tập hợp chỉ có tối đa ba phần tử. Do đó
$$n \le \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 1350.$$

3. Tiếp theo, tổng số các tập con chứa 1 phần tử, chứa 2 phần tử, chứa 3 phần tử của M là
$$\binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 1350$$
và tất cả các tập này thỏa mãn điều kiện bài toán (*rõ ràng hai tập phân biệt bất kỳ trong các tập này có giao không vượt quá 2 phần tử*). Do đó $n = 1350$ đạt được.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của n là $n = 1350$. □

Ví dụ 2.5.2 (Indian 2014). Cho số tự nhiên n và $X = \{1,2,\ldots,n\}$. Với hai tập con A và B của X, ký hiệu
$$A\Delta B = \{i\in X | i \in (A\backslash B)\cup(B\backslash A)\}.$$
Gọi $\mathscr{F}$ là một họ các tập con của X sao cho với mọi $A, B \in \mathscr{F}$ thì
$$|A\Delta B| \ge 2.$$
Chứng minh rằng $|\mathscr{F}| \le 2^{n-1}$ và tìm tất cả các họ $\mathscr{F}$ có 2^{n-1} phần tử.

Chứng minh. 1. Với mỗi tập con $A \subset \{1,2,\ldots,n-1\}$, thì trong cặp tập hợp $(A, A\cup\{n\})$, ***tối đa một tập hợp thuộc vào $\mathscr{F}$***. Thật vậy vì
$$A\backslash(A\cup\{n\}) = \emptyset, \quad (A\cup\{n\})\backslash A = \{n\} \Rightarrow A\Delta(A\cup\{n\}) = \{n\}.$$
Mặt khác, ta có tối đa 2^{n-1} cặp tập hợp $(A, A\cup\{n\})$. Do đó tập $\mathscr{F}$ có tối đa 2^{n-1} phần tử.

2. Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp theo n là nếu $|\mathscr{F}| = 2^{n-1}$ thì $\mathscr{F}$ ***hoặc chứa tất cả các tập con chứa số lẻ phần tử hoặc $\mathscr{F}$ chứa tất cả các tập hợp chứa số lẻ phần tử.***

- Kết quả hiển nhiên đúng với $n = 1$.

- Giả sử kết quả đúng đến $n = m - 1$, với m nguyên dương lớn hơn 1. Xét trường hợp với $n = m$. Đặt
$$\mathscr{F}_1 = \{A \in \mathscr{F} | m \in A\}, \quad \mathscr{F}_2 = \{A \in \mathscr{F} | m \notin A\}.$$
Theo giả thiết quy nạp, tập $\mathscr{F}_\in$ có nhiều nhất 2^{m-2} phần tử.
- Với mỗi tập hợp $A \in \mathscr{F}_1$, ta xét tập hợp mới $A \backslash \{m\}$. Khi đó
$$\mathscr{F}_3 = \{A \backslash \{m\} | A \in \mathscr{F}_1\}$$
Khi đó tập $\mathscr{F}_3$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán và theo giả thiết quy nạp thì lại có $|\mathscr{F}_3| \leq 2^{m-2}$. Nhưng
$$|\mathscr{F}_2| = |\mathscr{F}_3| \leq 2^{m-2} \Rightarrow |\mathscr{F}| = |\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| \leq 2^{m-2} + 2^{m-2} = 2^{m-1}.$$
Do đó nếu $|\mathscr{F}| = 2^{m-1}$ thì $|\mathscr{F}_1| = |\mathscr{F}_2| = 2^{m-2}$. Nhưng khi đó lại theo giả thiết quy nạp, họ $\mathscr{F}_\in$ chứa tất cả các tập con của $\backslash 1, 2, \ldots, m-1$ với, giả sử, số chẵn phần tử. Khi đó $\mathscr{F}_\infty$ chứa tất cả các tập con của $\{1, 2, \ldots, m\}$, chứa m, dạng $A \cup \{m\}$. Tuy nhiên A không thể thuộc vào $\mathscr{F}_2$, vì nếu không thì cả $A, A \cup \{m\}$ đều thuộc vào $\mathscr{F}$ vô lý. Khi đó A phải có số lẻ phần tử, $A \subset \{1, 2, \ldots, m-1\}$, và $|\mathscr{F}_1| = 2^{m-2}$ nên A phải chạy trên tất cả các tập có số lẻ phần tử. Do đó $\mathscr{F}_1$ cũng chứa các tập có số chẵn phần tử. Vậy $\mathscr{F}$ chứa tất cả các tập hợp có số chẵn phần tử. Tương tự khi $\mathscr{F}_2$ chứa tất cả các tập có số lẻ phần tử.

Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 2.5.3 (**Bankal 2012**). Cho n là số nguyên dương. Đặt tập hợp $P_n = \{2^n, 2^{n-1}.3, 2^{n-2}.3^2, \ldots, 3^n\}$. Với mỗi tập con X của P_n, đặt S_X là tổng tất cả các phần tử trong X, ở đây $S_\emptyset = 0$. Cho y là một số thực thỏa mãn điều kiện $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Chứng minh rằng tồn tại một tập con Y của P_n thỏa mãn điều kiện $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Giải. Ta có
$$\begin{aligned} S_{P_n} &= 3^n + 3^{n-1}.2 + \cdots + 3^2.2^{n-2} + 3.2^{n-1} + 2^n \\ &= (3-2)(3^n + 3^{n-1}.2 + \cdots + 3^2.2^{n-2} + 3.2^{n-1} + 2^n) \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Bằng cách chia cách phần tử của P_n cho 2^n ta đưa bài toán về dạng tương đương như sau:
Cho n là số nguyên dương, $a = \dfrac{3}{2}$, *và* $Q_n = \{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$. *Chứng tỏ rằng với mỗi giá trị của x thỏa mãn* $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, *luôn tồn tại một tập con X của* Q_n *sao cho* $0 \leq x - S_X < 1$.
Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Khi $n = 1$ thì $S_\emptyset = 0, S_{\{1\}} = 1, S_{\{a\}} = \dfrac{3}{2}, S_{\{1,a\}} = \dfrac{5}{2}$. Từ đây kiểm chứng thấy ngay là nếu x là một số thực thỏa $0 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$ thì luôn có một tập con X của Q_1 thỏa yêu cầu.
Giả sử kết quả bài toán đúng đến số nguyên dương n.
Xét x là một số thực với $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1}$.
+ Nếu $0 \leq x \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ thì theo giả thiết quy nạp tồn tại tập con $X \subset Q_n \subset Q_{m+1}$ thỏa

$0 \leq x - S_X < 1$.

+ Xét với $x > 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, khi đó vì

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1} = 2\left(a^{n+1}-1\right) = a^{n+1} + (a^{n+1}-2) > a^{n+1} + a^2 - 2 = a^{n+1} + \frac{1}{4} > a^{n+1}$$

nên

$$0 < (x - a^{n+1}) \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n.$$

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại tập con $X \subset Q_n$ thỏa mãn

$$0 \leq (x - a^{n+1}) - S_X < 1 \implies 0 \leq x - S_{X'} < 1$$

với

$$X' = X \bigcup \{a^{n+1}\} \subset Q_{n+1}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 2.5.4 (Romania, grade 9, final round). Cho p, q là hai số nguyên dương, $p \geq 2, q \geq 2$. Một tập hữu hạn X gọi là có tính chất (S) nếu: với bất kỳ cách chọn p tập con $B_i \subset X, i = 1, 2, \ldots, p$, không nhất thiết phân biệt, mỗi tập có q phần tử, thì luôn tồn tại tập con $Y \subset X$ có p phần tử, sao cho

$$|Y \cap B_i| \leq 2, \forall i = 1, 2, \ldots, p.$$

Chứng minh rằng

1. Mọi tập X có $pq - q$ phần tử đều không có tính chất (S).

2. Mọi tập hợp X có $pq - q + 1$ phần tử đều có tính chất (S).

Chứng minh. 1. Nếu X có $pq - q = (p-1)q$ phần tử, khi đó ta chọn $p-1$ tập, mỗi tập có q phần tử (là phân hoạch của X) như sau

$$B_1 = \{1, 2, \ldots, q\}, \quad B_2 = \{q+1, q+2, \ldots, 2q\}, \quad \ldots, \quad B_{p-1} = \{(p-2)q+1, \ldots, (p-1)q\}$$

và tập B_p là một tập tùy ý có q phần tử. Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet, thì với mọi tập Y có p phần tử trong X, sẽ tồn tại ít nhất một tập B_i ($i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$) sao cho giao của nó với Y có ≥ 2 phần tử. Vậy tập X không có tính chất (S).

2. Bây giờ với mỗi i cho trước, nhận xét tập

$$\bigcup_{j \neq i} B_i$$

có $\leq (p-1)q$ phần tử. Trong khi đó tập X có $pq - q + 1 = (p-1)q + 1$ phần tử. Do đó ta tìm được ***ít nhất một phần tử của tập X mà nó không nằm trong mọi tập B_j, với mọi $j \neq i$.***

- Với $i = 1$, sử dụng lập luận trên, ta tìm được phần tử x_1 mà $x_1 \notin B_j, \forall j = 2, \ldots, p$. Nếu $x_1 \in B_1$, ta tiếp tục qua bước 2, nếu $x_1 \notin B_1$, ta xây dựng tập B_1 ***mới bằng cách bỏ ra khỏi B_1 một phần tử y_1, và thêm vào tập B_1 phần tử x_1.*** Dĩ nhiên phần tử y_1 vẫn là phần tử trong X.

- Tiếp tục với $i = 2$, lưu ý tập B_1 sử dụng bây giờ là tập B_1 "mới". Lại sử dụng lập luận trên, ta tìm được phần tử x_2 mà x_2 không nằm trong bất cứ tập $B_1, B_3, B_4, \ldots, B_n$. Khi đó $x_2 \neq x_1$ (vì $x_1 \in B_1, x_2 \notin B_1$). Nếu $x_2 \in B_2$ ta tiếp tục quy trình, nếu $x_2 \notin B_2$, ta xây dựng tập B_2 ***mới bằng cách bỏ ra khỏi*** B_2 ***một phần tử*** y_2***, và thêm vào tập*** B_2 ***phần tử*** x_2.

3. Cứ tiếp tục quy trình này đến bước p, ta sẽ tìm được tập $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Tập Y giao với mỗi tập B_i "mới" chính xác một phần tử, đó là x_i. Bây giờ thay ngược trở lại x_i bởi y_i ta quay trở lại tập B_i "cũ". Nếu $y_i \notin Y$ thì $Y \cap B_i = \emptyset$, còn nếu $y_i \in Y$ thì $Y \cap B_i = \{y_i\}$.

$\square$

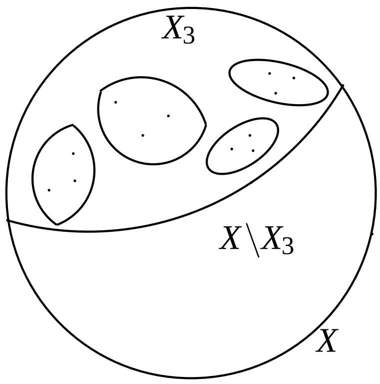
Ví dụ 2.5.5 (China TST 2015). Cho X là một tập khác rỗng và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập con của X sao cho

1. $|A_i| \leq 3, \forall i = 1, 2, \ldots, n$;
2. Bất kỳ một phần tử nào của X cũng nằm trong ít nhất 4 tập trong số $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Chứng minh rằng có thể chọn $\left[\dfrac{3n}{7}\right]$ tập hợp trong số các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mà hợp của chúng bằng X.

Chứng minh. Kết luận bài toán yêu cầu chọn được một số tập hợp, hợp lại bằng X, do đó ta sẽ

1. *Chọn tập đầu tiên có 3 phần tử, giả sử $A_1, |A_1| = 3$. Sau đó, ta chọn tiếp tập A_2 mà $|A_2| = 3$ và $A_2 \cap A_1 = \emptyset$. Sau khi chọn được tập A_2, ta chọn tiếp tập A_3 mà $|A_3| = 3$ và $A_3 \cap A_1 = \emptyset, A_3 \cap A_2 = \emptyset$, cứ tiếp tục như vậy đến khi không thể chọn thêm được tập nào nữa vào trong hệ.* Trong tất cả cách cách lựa chọn các tập hợp trong $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta chọn ra hệ tập hợp S_3 **cực đại**, giả sử $S_3 = \{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ $(i \leq n)$ (*tức là họ S_3 chứa nhiều tập hợp nhất có thể có*) mà $|A_t| = 3, \forall t = 1, 2, \ldots, i$ và $A_r \cap A_s = \emptyset, \forall 1 \leq r < s \leq i$ (điều này có nghĩa, mỗi lần bổ sung một tập hợp vào S_3 thì tập X_3 có số lượng phần tử tăng lên 3).



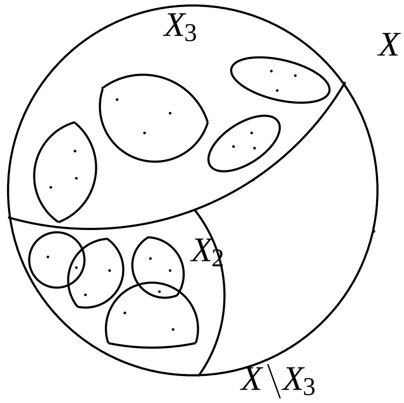
Đặt $X_3 = \bigcup_{A_r \in S_3} A_r$. Do tính tối đại của tập S_3, nên với bất kỳ tập hợp A_j $(j > i)$ thì

$$|A_j \cap (X \setminus X_3)| \leq 2$$

vì nếu không thì ta tiếp tục bổ sung A_j vào tập S_3, mâu thuẫn với tính tối đại của S_3. Và khi đó

$$|X_3| = 3i.$$

2. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ S_2 **cực đại** chứa các tập A_j còn lại trong số $A_{i+1},\ldots,A_n$, sao cho ***mỗi lần thêm một tập hợp vào họ S_2, thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 2***. Không mất tính tổng quát, giả sử
$$S_2 = \{A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_j\}$$



Đặt
$$X_2 = \bigcup_{A_r \in S_2} A_r \cap (X \backslash X_3)$$
thì theo cách xác định của S_2 ta có $|X_2| = 2j$ và theo tính tối đại của tập S_2 thì
$$|A_t \cap (X \backslash (X_2 \cup X_3))| \leq 1, \forall t = j+1, \ldots, n.$$

3. Bây giờ ta tiếp tục chọn họ S_1 chứa các tập A_s còn lại trong số $A_{j+1},\ldots,A_n$, sao cho ***mỗi lần thêm một tập hợp vào họ S_1, thì số lượng phần tử trong hợp của chúng tăng lên 1*** và ***dĩ nhiên các tập hợp trong họ S_1 chứa hết tất cả các phần tử của*** $X \backslash (X_3 \cup X_2) = X_1$. Không mất tính tổng quát, giả sử
$$S_1 = \{A_{j+1}, A_{i+2}, \ldots, A_k\}.$$

4. Khi đó $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| = 3i + 2j + k$, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ và
$$|S_3| + |S_2| + |S_1| = i + j + k = m.$$
Ta cần chứng minh $m \leq \frac{3n}{7}$.

   - Vì mỗi phần tử trong X_1 nằm trong ít nhất 4 tập hợp, nhưng do $|A_r \cap X_1| \leq 1, \forall r = j+1, \ldots, n$ nên
   $$n \geq i + j + 4k. \quad (1)$$
   Mỗi phần tử trong $X_1 \cup X_2$ xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, như do $|A_r| \cap (X_1 \cup X_2) \leq 2, \forall r = i+1, \ldots, n$ nên
   $$n \geq i + \frac{4(2j+k)}{2} = i + 4j + 2k. \quad (2)$$
   Mỗi phần tử trong X xuất hiện ít nhất trong 4 tập hợp, và $|A_r \cap X| \leq 3, \forall r = 1, 2, \ldots, n$, do đó
   $$n \geq \frac{4(3i+2j+k)}{3}. \quad (3)$$

- Lấy $20\times(1)+12\times(2)+27\times(3)$ ta có

$$59n \geq 140(i+j+k) = 140m \Rightarrow m \leq \frac{59n}{140} < \frac{3n}{7}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Ví dụ 2.5.6 (**Romania TST 2006**). Cho n là số nguyên dương. Một tập con $S \subset \{0,1,2,\dots,4n-1\}$ được gọi là tập **rời rạc** nếu với số k bất kỳ, hai điều kiện được sau thỏa mãn

1. Tập $S\bigcap\{4k-2,4k-1,4k,4k+1,4k+2\}$ có tối đa 2 phần tử.
2. Tập $S\bigcap\{4k+1,4k+2,4k+3\}$ có tối đa 1 phần tử.

Hỏi tập $\{0,1,\dots,4n-1\}$ có bao nhiêu tập con rời rạc?

Chứng minh.

- Ta diễn giải tập S, trong tập 5 số: gồm 4 số chia hết cho 4, chia 4 dư 1, chia 4 dư 2, chia 4 dư 3 và thêm một số chia 4 dư 2 thì tập S chứa tối đa 2 phần tử trong chúng. Trong một tập 3 số: chia 4 dư 1, dư 2, dư 3 thì tập S chứa tối đa một số. Rõ ra hai số chia cho 4 dư 2 và dư 3 không thể cùng nằm trong tập S (vì vi phạm điều kiện (ii)).
- Gọi S_n là tập hợp chứa các tập con rời rạc của tập $\{0,1,2,\dots,4n-1\}$. Rõ ràng là *các số có dạng* $4k+1,4k+2$ *bị ràng buộc bởi hai điều kiện*. Đây chính là cơ sở cho việc xây dựng công thức truy hồi.
- Gọi X_n là tập hợp chứa các tập con của S_n mà mỗi tập con của nó chứa phần tử $4n-1$ (*tức là các tập con của S_n mà các tập con đó chứa phần tử chia 4 dư 3*).
- Gọi Y_n là tập hợp chứa các tập con của S_n mà mỗi tập con của nó không chứa cả hai phần tử $4n-1$ và $4n-2$ (*tức là chứa các tập con của S_n mà mỗi tập con của nó không chứa hai phần tử chia 4 dư 2 và chia 4 dư 3, nghĩa là nó sẽ chứa các phần tử chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1*).
- Gọi Z_n là tập hợp chứa các tập con của S_n mà mỗi tập con của nó chứa phần tử $4n-2$ (*tức là chứa các tập con của S_n mà các tập con đó chứa phần tử chia 4 dư 2*).

  Khi đó
$$|S_n| = |X_n| + |Y_n| + |Z_n|.$$

1. Xét tập hợp X_{n+1} được xây dựng từ các tập hợp còn lại. Xét tập hợp $\{1,2,\dots,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2,4n+3\}$.
   - Từ tập X_n, khi đó ta chỉ có thể thêm vào mỗi tập của X_n phần tử $4n$ hoặc không thêm vào, vì bản thân tập X_{n+1} đã chứa phần tử $4n+3$. Vậy $|X_{n+1}| = 2|X_n|$.
   - Từ tập Y_n, ta cũng chỉ có thể thêm vào mỗi tập của Y_n phần tử $4n$ hoặc không thêm vào. Vì vậy $|X_{n+1}| = 2|Y_n|$.
   - Từ tập Z_n, ta cũng chỉ có thể thêm vào mỗi tập của Y_n phần tử $4n$ hoặc không thêm vào. Vậy $|X_{n+1}| = 2|Z_n|$.

   Từ đó ta có quan hệ truy hồi
$$|X_{n+1}| = 2|X_n| + 2|Y_n| + 2|Z_n| = 2|S_n| \quad (1).$$

2. Xét tập hợp Y_{n+1} được xây dựng từ các tập hợp còn lại

   - Từ tập Y_n, khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của Y_n phần tử $4n$ hoặc $4n+1$, thêm cả hai hoặc không thêm phần tử nào. Khi đó $|Y_{n+1}| = 4|Y_n|$.
   - Từ tập X_n, khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của X_n phần tử $4n$ hoặc $4n+1$ nhưng không thể thêm đồng thời hai phần tử này, hoặc không thêm vào. Khi đó $|Y_{n+1}| = 3|X_n|$.
   - Từ tập Z_n, khi đó ta có thể thêm vào mỗi tập con của Z_n phần tử $4n$ hoặc $4n+1$ nhưng không thể thêm đồng thời hai phần tử này, hoặc không thêm vào. Khi đó $|Y_{n+1}| = 3|Z_n|$.

   Từ đó ta có quan hệ hồi quy

$$|Y_{n+1}| = 3|X_n| + 4|Y_n| + 3|Z_n| \quad (2).$$

3. Tương tự ta cũng có

$$|Z_{n+1}| = 2|X_n| + 2|Y_n| + 2|Z_n| = 2|S_n| \quad (3).$$

Từ ba quan hệ (1), (2), (3) ta có $|S_{n+1}| = 7.|S_n|$. Từ đó ta tính được

$$|S_{n+1}| = 7^n.|S_1| = 8.7^n.$$

□

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 3.1 (Olympic KHTN lần 1). Xét tập $M = \{1,2,3,\dots,10\}$ và $A_1, A_2, \dots, A_n$ là dãy các tập con khác rỗng, phân biệt của M sao cho

$$|A_i \cap A_j| \le 3, \forall 1 \le i < j \le n.$$

Tìm giá trị lớn nhất của n.

Đáp số: $n = 385$.

Bài tập 3.2 (Đài Loan 1998). Cho $n \ge k \ge 3$ và $X = \{1,2,\dots,n\}$. Gọi F_k là một họ các k_tập của X sao cho với mọi $A, B \in F_k$ thì

$$|A \cap B| \le k-2.$$

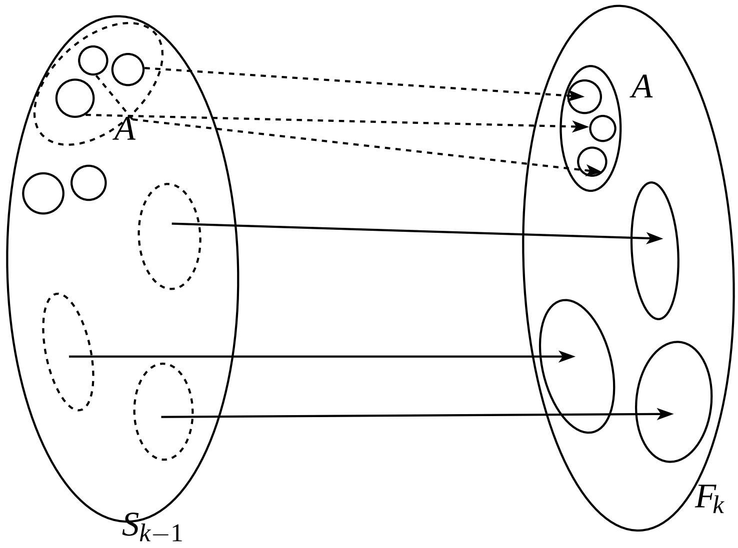
Chứng minh rằng tồn tại một tập con M_k của X, $|M_k| \ge [\log_2 n] + 1$ sao cho M_k không nhận bất cứ phần tử nào của F_k là tập con của nó.

Chứng minh. 1. Nếu $k \ge \log_2 n$ thì kết quả hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $k < \log_2 n$. Đặt $m = [\log_2 n] + 1$.

2. ***Một tập con** M **chứa** $k-1$ **phần tử của** X**, thì tồn tại nhiều nhất là một phần tử** $A \in F_k$ **sao cho*** $M \subset A$. Thật vậy, nếu có hai phần tử A, B trong F_k mà $M \subset A, M \subset B$ thì

$$|A \cap B| \ge |M| = k-1,$$

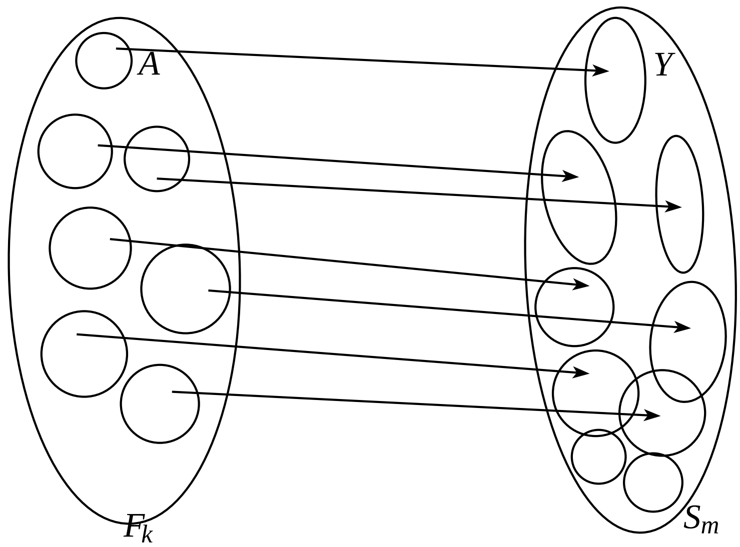
   mâu thuẫn với giả thiết. Mặt khác mỗi phần tử A thuộc F_k nó sẽ chứa k tập con, mỗi tập chứa $k-1$ phần tử.



(*Ta giải thích cho hình minh họa trên một chút. Gọi S_{k-1} là tập tất cả các tập con, mỗi tập con chứa $k-1$ phần tử của X. Một phần tử $X \in F_k$, thì A chứa k tập con, mỗi tập con chứa $k-1$ phần tử. Khi đó tương ứng k tập con này sẽ nằm trong S_{k-1}, và hợp của k tập con này trong S_{k-1} chính là tập A. Vậy trong tập S_k, thì k tập con này cho ta tương ứng một phần tử A thuộc F_k. Dĩ nhiên có thể xảy ra một phần tử trong S_{k-1} sẽ không là tập con của bất cứ phần tử nào trong F_k*).
Từ đó ta có

$$|F_k| \le \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}.$$

3. Bây giờ ta gọi S_m là họ các tập con, mỗi tập con m phần tử của tập X. ***Trường hợp "xấu nhất", tức là cần nhiều tập con nhất trong S_m mà mỗi tập đó đều nhận một phần tử trong F_k là tập con, là mỗi phần tử A của F_k, riêng biệt, là tập con của một tập Y trong S_m.***



Đến đây ta có ngay được kết luận bài toán nếu chứng tỏ được

$$|S_m| \ge |F_k|.$$

(khi đó sẽ có một phần tử trong S_m không nhận bất cứ tập nào trong F_k là tập con, tập này có m phần tử. Dĩ nhiên ta có thể bổ sung vào tập này một số phần tử nữa nếu không bị vi phạm.) Ta có được kết luận nếu chứng tỏ được

$$\frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k} \le \binom{n}{m} \Leftrightarrow \frac{1}{n-k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} \le \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

hay

$$\frac{1}{n-k+1}\frac{m!}{k!} \le \frac{(n-k)!}{(n-m)!} \Leftrightarrow \frac{1}{n-k+1}\frac{m!}{k!(m-k)!} \le \frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} \Leftrightarrow \frac{1}{n-k+1}\binom{m}{k} \le \binom{n-k}{m-k}.$$

Nhưng kết quả trên là hiển nhiên, vì ta có được khẳng định mạnh hơn là

$$\frac{1}{n-k+1}\binom{m}{k} < 1 \quad (*).$$

4. Ta sử dụng kết quả
$$\binom{m}{k} \le 3.2^{m-3}, \quad \forall m \ge k \ge 3.$$
Thật vậy, với $m = 3, m = 4$ kiểm tra dễ dàng đúng. Giả sử kết quả đúng cho mọi giá trị $\le m$. Khi đó với $m+1$ thì, sử dụng tính chất nhị thức và giả thiết quy nạp, có
$$\binom{m+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \le 3.2^{m-3} + 3.2^{m-3} = 3.2^{m-2}.$$
Theo giả thiết quy nạp thì đúng.

5. (*) sẽ được chứng minh nếu chứng tỏ được
$$\frac{1}{n-k+1}.3.2^{m-3} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n-k+1}.3.2^{[\log_2 n]-2} < 1$$
hay
$$\frac{3}{4(n-k+1)}.2^{[\log_2 n]} < 1.$$
Vì $2^{[\log_2 n]} < 2^{\log_2 n} = n$ và
$$\frac{3n}{4n-4k+1} < 1 \Leftrightarrow 4k < n+1$$
(kết quả cuối cùng đúng do
$$4k < 4.\log_2 n = \log 2(4n) < \log_2(2^{n+1}) = n+1.$$
) Từ đó (*) được chứng minh. Bài toán kết thúc.

□

Bài tập 3.3 (**THTT 444 - Trần Nam Dũng**). Cho 100 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ nằm trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập con X của $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ gồm 50 phần tử sao cho

$$\left| \sum_{i \in X} \overrightarrow{AA_i} - \sum_{i \in E \setminus X} \overrightarrow{AA_i} \right| \leq \sqrt{2}.$$

Bài tập 3.4 (**China 2006**). Cho trước số nguyên dương $n \geq 2$ và tập X hữu hạn. Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là n tập con tùy ý của X, mỗi tập chứa ít nhất hai phần tử. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|X|$ sao cho tồn tại một tập con Y của X thỏa mãn hai điều kiện

1. $|Y| = n$;
2. $|Y \cap B_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Đáp số: $|X| = 2n - 1$.

Bài tập 3.5 (**Tuyển tập Olympic 30-4 năm 2007**). Cho $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ là các tập hợp thỏa mãn điều kiện

1. $|A_i| = 8, \forall i = 1, 2, \ldots, 10$;
2. $|A_i \cap A_j| = 1, \forall 1 \leq i < j \leq 10$.

Chứng minh rằng $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10}| \geq 39$.

Bài tập 3.6 (**Dan Schwarz**). Cho X là một tập hợp. Gọi n và $m \geq 1$ là các số nguyên không âm sao cho

$$|X| \geq m(n-1) + 1.$$

Giả sử $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là n tập con của X sao cho $|B_i| \leq m, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng tồn tại một tập con Y của X sao cho $|Y| = n$ và $|Y \cap B_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Bài tập 3.7 (**China 2010**). Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ là các tập con phân biệt của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$. Xác định giá trị lớn nhất của

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| . |A_{i+1}|}.$$

Chứng minh. 1. Ta nhận thấy các tập $A_i (i = 1, 2, \ldots, 2n)$ phải khác rỗng, vì nếu có tập nào bằng rỗng, thì biểu thức không xác định.

2. Chúng ta chỉ quan tâm tới những biểu thức

$$A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$$

vì nếu $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ thì tử số bằng 0 và ta loại bỏ biểu thức đó ra khỏi tổng cần tính.

3. Vói mỗi i mà $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Đặt $X = A_i \cap A_{i+1}$ thì $|X| \geq 1$. Ngoài ra do
$$X \subset A_i, \quad X \subset A_{i+1}$$
và A_i, A_{i+1} phân biệt nên
$$|A_i|.|A_{i+1}| \geq |X|.(|X|+1).$$
Từ đó suy ra
$$\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i|.|A_{i+1}|} \leq \frac{|X|}{|X|(|X|+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

4. Từ đó suy ra
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i|.|A_{i+1}|} \leq 2n.\frac{1}{2} = n.$$

5. Ta xây dựng một trường hợp cho dấu bằng, đó là
$$A_{2i-1} = \{i\}, \quad A_{2i} = \{i, i+1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
với chú ý $A_{2n} = \{n, 1\}$.

□

Bài tập 3.8 (Chọn đội tuyển KHTN 2010). Cho số nguyên dương $n > 10$. Tìm số nguyên dương m lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại m tập con A_j của tập $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, mỗi tập con gồm n phần tử sao cho
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1, \forall 1 \leq i < j < k \leq m.$$

Đáp số: $m = 4$

Bài tập 3.9 (China 2014). Với các tập hợp khác rỗng S, T, ta định nghĩa hai tập
$$S + T = \{s + t | s \in S, t \in T\}, \quad 2S = \{2s | s \in S\}.$$
Cho n là số nguyên dương và A, B là các tập con khác rỗng của $\{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh tồn tại một tập con D của $A + B$ sao cho

1. $D + D \subseteq 2(A + B)$;
2. $|D| \geq \dfrac{|A|.|B|}{2n}$.

Chứng minh. 1. Với mỗi phần tử $a \in A$, xét tập hợp
$$a - B = \{a - b | b \in B\}.$$
Khi đó $|a - B| = |B|$ và
$$a - B \subset \{-n+1, -n+2, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\} = M.$$

Ta thấy $|M| = 2n-1$. Khi đó ta có $|A|.|B|$ tập hợp dạng $a-B$, tương ứng sẽ có $|A|.|B|$ số nguyên, tất cả các số nguyên này đều nằm trong M. Do đó theo nguyên lý Dirichlet, ***tồn tại một phần tử*** $x \in M$, thuộc vào ít nhất

$$m = \left[\frac{|A|.|B|}{2n-1}\right] + 1 > \frac{|A|.|B|}{2n-1} > \frac{|A|.|B|}{2n}$$

tập hợp. Giả sử m tập hợp đó chứa x là

$$a_1 - B, \quad a_2 - B, \dots, a_m - B$$

với $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset A$.

2. Khi đó, các phần tử

$$a_1 - a, a_2 - x, \dots, a_m - x$$

đều thuộc vào B. Xét tập $D = \{2a_1 - a, \dots, 2a_m - x\}$ thì

$$|D| = m = \left[\frac{|A|.|B|}{2n-1}\right] + 1$$

và dễ dàng kiểm chứng

$$D + D \subseteq 2(A+B).$$

□

Bài tập 3.10. Cho n và k là các số nguyên dương sao cho $n > k^2 - k + 1$. Cho n tập hợp, mỗi tập hợp có k phần tử sao cho hai tập hợp tùy ý trong n tập hợp đó đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh n tập hợp đó đều có một phần tử chung.

Bài tập 3.11. Cho $k \geq 1$ là một số tự nhiên. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất n sao cho với mọi tập gồm n số nguyên luôn có 2 số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho $2k+1$.

Bài tập 3.12. Xác định số n lớn nhất sao cho tồn tại sao cho tồn tại các tập phân biệt $S_1, S_2, \dots, S_n$ thỏa mãn

1. $\left|S_i \bigcup S_j\right| \leq 2006$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$.
2. $S_i \bigcup S_j \bigcup S_k = \{1, 2, \dots, 2010\}$ với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$

Bài tập 3.13 (VMO 2004). Cho tập A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Bài tập 3.14 (Stars of Mathematics 2014). Cho các số nguyên dương M, m, n thỏa mãn $1 \leq m \leq n, 1 \leq M \leq \dfrac{m(m+1)}{2}$ và A là một tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $|A| = m$. Chứng minh rằng tồn tại tập con $B \subseteq A$ sao cho

$$0 \leq \sum_{b \in B} b - M \leq n - m.$$

Bài tập 3.15 (China 2007). Cho X là tập hợp gồm 56 phần tử. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho với bất kỳ 15 tập con tùy ý của X, nếu hợp của 7 tập tùy ý trong 15 tập này chứa ít nhất n phần tử, thì tồn tại 3 tập trong 15 tập này mà giao của chúng khác rỗng.

Chứng minh. 1. Giả sử $X = \{1, 2, \ldots, 56\}$. Nếu $n \le 40$, đặt

$$A_i = \{i, i+7, i+14, i+21, i+28, i+35, i+42, i+49\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$$

Viết tường minh như sau

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}\\
A_2 &= \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51\}\\
A_3 &= \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52\}\\
A_4 &= \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53\}\\
A_5 &= \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, 54\}\\
A_6 &= \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55\}\\
A_7 &= \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56\}.
\end{aligned}$$

Đặt

$$B_j = \{j, j+8, j+16, j+24, j+32, j+40, j+48\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 8.$$

Viết tường minh như sau

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{1, 9, 17, 25, 33, 41, 49\}\\
B_2 &= \{2, 10, 18, 26, 34, 42, 50\}\\
B_3 &= \{3, 11, 19, 27, 35, 43, 51\}\\
B_4 &= \{4, 12, 20, 28, 36, 44, 52\}\\
B_5 &= \{5, 13, 21, 29, 37, 45, 53\}\\
B_6 &= \{6, 14, 22, 30, 38, 46, 54\}\\
B_7 &= \{7, 15, 23, 31, 39, 47, 55\}\\
B_8 &= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}.
\end{aligned}$$

2. Khi đó ta có

$$\begin{gathered}
|A_i| = 8 (i = 1, 2, \ldots, 7), \quad |A_i \cap A_j| = 0 (1 \le i < j \le 7),\\
|B_j| = 7 (j = 1, 2, \ldots, 8), \quad |B_i \cap B_j| = 0 (1 \le i < j \le 8),\\
|A_i \cap B_j| = 1 (1 \le i \le 7, 1 \le j \le 8).
\end{gathered}$$

3. Khi đó với mọi 3 tập trong 15 tập con này, sẽ có hai tập hoặc thuộc họ A_i, hoặc thuộc họ B_j. Do đó giao của ba tập này bằng rỗng. Với 7 tập tùy ý trong 15 tập con trên, giả sử là

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}, B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_t}, \quad s + t = 7$$

ta có

$$\begin{aligned}
&|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_s} \cup B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \ldots \cup B_{j_t}|\\
&= |A_{i_1}| + \cdots + |A_{i_s}| + |B_{j_1}| + \cdots + |B_{j_t}| - st\\
&= 8s + 7t - st = 8s + 7(7-s) - s(7-s) = (s-3)^2 + 40 \ge 40.
\end{aligned}$$

Do vậy $n \ge 41$.

4. Ta chứng minh $n = 41$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Giả sử ngược lại, tồn tại 15 tập con của X, sao cho hợp của mọi 7 tập trong số 15 tập con đó chứa ít nhất 41 phần tử, nhưng không tồn tại 3 tập trong số 15 tập này có giao khác rỗng. Do mỗi phần tử của X chỉ có thể thuộc vào tối đa 2 tập trong 15 tập đó, ta có thể giả sử mỗi phần tử của X thuộc vào chính xác 2 trong số 15 tập đó (nếu không, thì ta có thể một số phần tử vào một số tập hợp trong 15 tập đó, thì điều kiện đầu tiên vẫn đảm bảo). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một tập hợp trong số 15 tập, ký hiệu là A, mà
$$|A| \geq \left[\frac{2\times 56}{15}\right] + 1 = 8,$$
và gọi 14 tập còn lại là $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$.
   - Do hợp của mọi 7 tập trong $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$ chứa ít nhất 41 phần tử. Do đó tổng số phần tử trong 15 tập này
   $$y \leq 41 \times \binom{14}{7}.$$
   - Với mỗi $a \in X$, nếu a
   $not \in A$ thì a thuộc vào chính 2 2 tập trong số $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$. Do đó a được tính lặp $\binom{14}{7} - binom127$ lần. Nếu $a \in A$, thì A chỉ thuộc vào đúng một tập $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$. Do đó a được tính lặp $\bigcap 147 - \binom{13}{7}$ lần. Do đó
   $$\begin{aligned}41 \times \binom{14}{7} &\leq y \\ &\leq (56 - |A|)\left(\binom{14}{7} - \binom{12}{7}\right) + |A|\left(\binom{14}{7} - \binom{13}{7}\right) \\ &\leq 56\left(\binom{14}{7} - \binom{12}{7}\right) - |A|\left(\binom{13}{7} - \binom{12}{7}\right) \\ &\leq 56\left(\binom{14}{7} - \binom{12}{7}\right) - 8\left(\binom{13}{7} - \binom{12}{7}\right),\end{aligned}$$
   từ đây dẫn đến $196 \leq 195$, mâu thuẫn.

□

Định lý 3.1 (Erdos). *Cho $\mathscr{F}$ là một họ các tập con của tập n phần tử X thỏa mãn*

1. *$|\mathscr{F}| \geq 2$ và với mọi $A \in \mathscr{F}$ thì $|A| \geq 2$.*
2. *Với hai phần tử bất kỳ $x, y \in X$ tồn tại duy nhất $A \in \mathscr{F}$ để $\{x, y\} \subset A$.*

Khi đó
$$|\mathscr{F}| \geq n.$$

Bài tập 3.16 (China 2011). Cho n là số nguyên dương và đặt $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Với hai tập con khác rỗng A, B, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của
$$|A\Delta S| + |B\Delta S| + |(A+B)\Delta S|.$$

Chứng minh. 1. Đặt $X = A\cap S, Y = B\cap S$. Khi đó $A = X\cup A'$ và $X\cap A' = \emptyset, B = B\cup B'$, và $B'\cap Y = \emptyset$. Khi đó

$$|A\Delta S| = |A| + |S| - 2|A\cap S| = |A'| + |X| + |S| - 2|X| = |A'| + |S| - |X|$$
$$|B\Delta S| = |B| + |S| - 2|B\cap S| = |B'| + |Y| + |S| - 2|Y| = |B'| + |S| - |Y|$$

2. Ta cũng có với hai tập hợp A, B thì $|A+B| \geq |A| + |B| - 1$.

3. Nếu cả hai tập $A, B \subset S$, khi đó $A = X, B = Y, A' = \emptyset, B' = \emptyset$. Dễ nhận thấy $1 \notin A+B$, do $\min(A), \min(B) \geq 1$. Từ đây suy ra
$$|(A+B)\cap S| \leq n-1.$$
Ta có
$$|(A+B)\cup S| = |A+B| + |S| - |(A+B)\cap S| \geq (|A| + |B| - 1) + n - (n-1) = |A| + |B|.$$
Do đó
$$|(A+B)\Delta S| = |(A+B)\cup S| - |(A+B)\cap S| \geq |A| + |B| - (n-1).$$
Vậy trong trường hợp này ta được
$$|A\Delta A| + |B\Delta S| + |(A+B)\Delta S| \geq 2|S| - |X| - |Y| + |A| + |B| - n + 1 = 2|S| - n + 1 = n+1.$$

4. Nếu ít nhất một trong hai tập A, B không là tập con của S. Khi đó
$$|(A+B)\Delta S| = |A+B| + |S| - 2|(A+B)\cap S| \geq |A+B| + |S| - 2|S| = |A+B| - |S| \geq |A| + |B| - 1 - |S|.$$
Do đó
$$\begin{aligned}|A\Delta S| + |B\Delta S| + |(A+B)\Delta S| &\geq |A'| + |S| - |X| + |B'| + |S| - |Y| + |A| + |B| - 1 - |S|\\ &= |A'| + |S| - |X| + |B'| + |S| - |Y| + |A'| + |X| + |B'| + |Y| - 1 - |S|\\ &= 2|A'| + 2|B'| + |S| - 1\\ &\geq 2 + |S| - 1 = n+1.\end{aligned}$$
Bất đẳng thức cuối cùng có được do ít nhất một bất đẳng thức $|A'| \geq 1$ hoặc $|B'| \geq 1$ phải xảy ra.

Vậy trong cả hai trường hợp, thì GTNN của bài toán là $n+1$. □

Ta chứng minh $|A+B| \geq |A| + |B| - 1$. Thật vậy, giả sử các phần tử của tập A là $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ và các phần tử của B là $b_1 < b_2 < \ldots < b_l$. Khi đó trong tổng $A+B$ luôn có $k+l-1$ số tăng dần trong dãy sau
$$a_1 + b_1, a_1 + b_2, \ldots, a_1 + b_l, a_2 + b_l, a_3 + b_l, a_4 + b_l, \ldots, a_k + b_l.$$
Điều này chứng tỏ kết quả cần chứng minh.

Bài tập 3.17. Cho n là số nguyên dương và S là tập gồm n phần tử, $A_1, \ldots, A_m$ là m tập con, mỗi tập chứa ít nhất hai phần tử, của S thỏa mãn: với bộ ba chỉ số (i, j, k) mà $A_i\cap A_j \neq \emptyset, A_j\cap A_k \neq \emptyset, A_k\cap A_i \neq \emptyset$ thì sẽ có $A_i\cap A_j\cap A_k \neq \emptyset$. Chứng minh rằng $m \leq 2^{n-1} - 1$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Hiển nhiên phát biểu đề bài đúng với $n = 2$. Giả sử kết luận đúng với mọi số nguyên dương bé hơn n. Xét hai trường hợp

1. Không tồn tại i, j nào trong $\{1, 2, \ldots, m\}$ để $A_i \cup A_j = S$ và $|A_i \cap A_j| = 1$. Gọi x là phần tử tùy ý thuộc S. Khi đó

   - Theo giả thiết quy nạp, số tập A_i lớn nhất không chứa x là $2^{n-2} - 1$.
   - Số các tập con chứa x của S bằng 2^{n-1}. Nếu $x \in A_i$ thì sẽ không có chỉ số j nào để $A_j = (S \backslash A_i) \cup \{x\}$, nếu không sẽ dẫn đến $|A_i \cap A_j| = 1$, mâu thuẫn. Do vậy, chỉ có cùng lắm là một nửa số tập con chứa x của S xuất hiện dưới dạng các tập A_i. Như thế số lớn nhất các tập A_i là
   $$2^{n-2} - 1 + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1.$$

2. Tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho $A_1 \cup A_2 = S$ và $A_1 \cap A_2 = \{x\}$. Đặt $|A_1| = r + 1, |A_2| = s + 1$ thì $r + s = n - 1$.

   - Theo giả thiết quy nạp, số lớn nhất các tập A_i sao cho $A_i \subset A_1$ là $2^r - 1$.
   - Theo giả thiết quy nạp, số lớn nhất các tập A_j sao cho $A_j \subset A_2$ là $2^s - 1$.
   - Bây giờ đếm tiếp xem có bao nhiêu tập dạng A_i mà không là tập con của A_1, A_2. Nếu A_i không là tập con của A_1, A_2 thì $A_1 \cap A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Vì $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, nên theo giả thiết thì
   $$A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap A_i = \{x\}.$$
   Do đó $A_i = \{x \cup (A_i \backslash A_2) \cup (A_i \backslash A_2)\}$. Ngoài ra co các tập khác rỗng $A_i \cap A_1$ và $A_i \backslash A_2$ có thể được chọn tương ứng theo $2^s - 1$ và $2^r - 1$ cách, nên số lớn nhất các tập A_i dạng này là $(2^s - 1)(2^r - 1)$.

   Từ đó suy ra số lớn nhất các tập dạng này là
   $$2^r - 1 + 2^s - 1 + (2^r - 1)(2^s - 1) = 2^{r+s} - 1 = 2^{n-1} - 1.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Một số định lý trong lý thuyết tập hợp cực trị, Vũ Thế Khôi, Bài giảng tại Viện Toán Học dành cho trường hè 2012.

2. Combinatorial Mathematics, Stefan H. M. van Zwam, Princeton University 2013.

3. Khoảng cách Hamming, bài giảng trên mạng.

4. Combinatorics of sets, Po-Shen Loh, June 2013.

5. Combinatorial problems in Mathematical Competitions, Yao Zhang, World Scientific 2011.

6. Đề thi học sinh giỏi các nước trên trang mathlinks.ro.