DÃY SỐ CỘNG TÍNH DƯỚI

Kiều Đình Minh – Hoàng Bảo Lâm – Nguyễn Đăng Khoa
THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

Trên các số báo TH&TT trước, chúng tôi đã giới thiệu một số dãy số đặc biệt: Dãy số điều hòa, dãy số lồi, … Trong số này chúng tôi tiếp tục gửi đến bạn đọc một loại dãy số cũng rất thú vị khác, đó là dãy số "Dưới cộng tính".

I. Định nghĩa và tính chất

1. Định nghĩa

Dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ được gọi là dãy số **Cộng tính dưới** nếu thỏa mãn $x_{m+n}\leq x_m+x_n$, với mọi $m,n=1,2,3,\ldots.$

Nếu dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn bất đẳng thức $x_{m+n}\geq x_m+x_n$, với mọi $m,n=1,2,3,\ldots.$ thì $(x_n)_{n\geq 1}$ được gọi là dãy số **Cộng tính trên**.

Rõ ràng nếu dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn $x_{m+n}\leq x_m+x_n+c, \forall m,n=1,2,3,\ldots$ với c là một hằng số thì dãy $(x_n+c)_{n\geq 1}$, cũng là một dãy cộng tính dưới.

Bạn đọc có thể tự lấy thí dụ về các dãy số cộng tính dưới hay dãy số cộng tính trên, chẳng hạn: Dãy số (x_n) với $x_n=\sqrt{n}\,(n=1,2,\ldots)$ là dãy số cộng tính dưới, dãy số (x_n) với $x_n=n^2\,(n=1,2,\ldots)$ là dãy số cộng tính trên. Trong bài này, chúng tôi chỉ nói về tính chất của dãy số cộng tính dưới như tên của bài báo đã nêu. Về dãy số cộng tính trên, bạn đọc hãy tự tìm hiểu thêm.

2. Tính chất

Tính chất 1: Với mọi dãy cộng tính dưới $(x_n)_{n\geq 1}$, ta có

$$x_n\leq kx_m+x_{n-km}, \forall k<\frac{n}{m}\ (m,n,k\in\mathbb{N}^*).\quad (1)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo k. Theo giả thiết, $x_n=x_{m+(n-m)}\leq x_m+x_{n-m}$, nên (1) đúng khi $k=1$. Giả sử (1) đúng đến k, ta có $x_n\leq kx_m+x_{n-km}=kx_m+x_{m+(n-km-m)}\leq kx_m+x_m+x_{n-km-m}=(k+1)x_m+x_{n-(k+1)m}$, nghĩa là (1) cũng đúng đến $k+1$, với $k+1<\frac{n}{m}$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. ■

Ở đây ta chỉ quy nạp theo k đến chừng nào bất đẳng thức $k<\frac{n}{m}$ vẫn đúng!

Tính chất 2: Với mọi dãy cộng tính dưới $(x_n)_{n\geq 1}$, ta có

$$x_n\leq mx_1+\left(\frac{n}{m}-1\right)x_m, \forall n\geq m\ (m,n\in\mathbb{N}^*).\quad (2)$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có

$x_m=x_{1+(m-1)}\leq x_1+x_{m-1}\leq\ldots\leq mx_1$. Viết $n=mk+r$, với $k\geq 1$, $r\in\{0;1;\ldots;m-1\}$. Ta có $x_m\leq mx_1$ và $x_r\leq rx_1$. Ta cần chỉ ra rằng $x_{km+r}\leq mx_1+\left(\frac{km+r}{m}-1\right)x_m$

hay $mx_{km+r}\leq m^2x_1+((k-1)m+r)x_m\quad (*)$

Ta sẽ chứng minh $(*)$ bằng quy nạp theo k.

Với $k=1,$ ta phải chứng minh $mx_{m+r} \le m^2x_1 + rx_m.$ Ta có được điều này bằng cách cộng hai bất đẳng thức sau

$$rx_{m+r} \le r^2x_1 + rx_m$$
$$(m-r)x_{m+r} \le (m-r)(m+r)x_1 = (m^2-r^2)x_1$$

Giả sử $(*)$ đúng đến $k,$ tức là $mx_{km+r} \le m^2x_1 + ((k-1)m+r)x_m.$ Cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với $mx_m,$ ta được $mx_{km+r} + mx_m \le m^2x_1 + (km+r)x_m.$

Lại có $mx_{(k+1)m+r} \le m(x_{km+r} + x_m) = mx_{km+r} + mx_m$

Từ đó suy ra $(*)$ đúng cho $k+1.$ Theo nguyên lý quy nạp ta có điều cần chứng minh.■

Tính chất 3: Cho dãy cộng tính dưới $(x_n)_{n\ge1}$, khi đó nếu $m \ge n$ thì

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge \frac{n(n+1)}{2m}x_m \quad (3)$$

Chứng minh. Với $m=n$ thì (3) đúng, nghĩa là có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge \frac{n+1}{2}x_n \quad (**)$$

Thật vậy, ta có thể thấy điều này bằng cách cộng các bất đẳng thức cùng chiều sau

$$x_1 + x_{n-1} \ge x_n$$
$$x_2 + x_{n-2} \ge x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1} + x_1 \ge x_n$$

Suy ra $2(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \ge (n-1)x_n \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \ge \frac{n-1}{2}x_n + x_n = \frac{n+1}{2}x_n.$

Bây giờ với $j \in \mathbb{N}^*,$ đặt $y_j = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_j}{1+2+\dots+j}.$ Khi đó, từ (**) bằng cách cho $m=n=j=k+1,$ ta được $y_j \ge \frac{x_j}{j}$ và $y_j \ge y_{j+1}.$ Từ đó, khi $m \ge n,$ ta có

$$y_n \ge y_{n+1} \ge \dots \ge y_{m-1} \ge y_m \ge \frac{x_m}{m}.■$$

Tính chất 4: Cho dãy cộng tính dưới $(x_n)_{n\ge1}$, khi đó

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \ge x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n.$ Hiển nhiên khẳng định đúng với $n=1, n=2.$ Giả sử khẳng định đúng với $n=1,2,\dots,k-1$ $(k \in \mathbb{N}, k>2).$ Ta có

$$x_1 = x_1$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} \ge x_2$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \ge x_3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_{k-1}}{k-1} \ge x_{k-1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$(k-1)x_1+(k-2)\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{k-1}\geq x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}$$

$$\Rightarrow k\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{k-1}\right)\geq 2\left(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}\right)\geq (k-1)x_k$$

$$\Rightarrow x_1+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_k}{k}\geq x_k.$$

Theo nguyên lý quy nạp thì (4) được chứng minh xong.■

Ta cũng có thể sử dụng tích chất 3 để chứng minh (4) như sau: Bằng cách áp dụng (3) nhiều lần ta được

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\left(x_1+x_2+\ldots+x_j\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2n}x_n+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j(j+1)}.\frac{j(j+1)}{2}.x_n=x_n.$$

Tính chất 5 (Bổ đề Fekete) : Cho dãy cộng tính dưới $(x_n)_{n\geq 1}$ không âm, khi đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$ và giới hạn đó bằng $\inf\limits_{n\geq 1}\frac{x_n}{n}$.

Chứng minh. Đặt $L=\inf\limits_{n\geq 1}\frac{x_n}{n}$. Với $\varepsilon>0$ bất kỳ, chọn n sao cho $a_n<n(L+\varepsilon)$ (số n như vậy là tồn tại theo định nghĩa của infimum). Đặt $c=\max\limits_{1\leq i<n}x_i$. Nếu $m\geq n$, đặt $m=qn+r$ với $0\leq r<n$. Từ tính chất cộng tính dưới của dãy , ta có

$x_m=x_{qn+r}=x_{n+n+\ldots+n+r}\leq x_n+x_n+\ldots+x_n+x_r\leq qx_n+c.$

Vì vậy $\frac{x_m}{m}\leq\frac{qx_n}{m}+\frac{c}{m}<\frac{qn(L+\varepsilon)}{m}+\frac{c}{m}\to L+\varepsilon$ khi $m\to+\infty$, do $\frac{qn}{m}\to 1$ khi $m\to+\infty$.■

II. Một số thí dụ

Thí dụ 1. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a_{i+j}\leq a_i+a_j$, với mọi $i,j\geq 1,\ i+j\leq n$. Chứng minh rằng:

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}\geq\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).\frac{a_n}{n}.$$

Lời giải. Đặt $t=\min\left\{a_1,\frac{a_2}{2},\ldots,\frac{a_n}{n}\right\}=\frac{a_l}{l}$ $(1\leq l\leq n)$. Khi đó xét dãy số (b_i) xác định bởi $b_i\geq 0,\forall i=\overline{1,n},\ b_l=0,\ b_i=a_i-ti.$ Khi đó có $b_{i+j}\leq b_i+b_j$ hay dãy (b_i) thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta có

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i-ti}{i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i^2}-t\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ và $\frac{b_n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{a_n-tn}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{a_n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-t\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$

Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i^2}\geq\frac{a_n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}\geq\frac{b_n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ $(*)$

Ta chứng minh $(*)$ bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, với $n=1$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng đến $n-1$. Xét các trường hợp

+) Nếu $l=n$ tức $b_n=0$ thì khẳng định luôn đúng.

+) Nếu $l\neq n$, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}\geq\sum_{i=1}^{n-l}\frac{b_i}{i^2}\geq\frac{b_{n-l}}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}=\frac{b_{n-l}+b_l}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}\geq\frac{b_n}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}.$$

Ta chứng minh dãy số $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ là giảm. Thật vậy

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} < \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$, điều này đúng vì $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} > 1 > \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2} \geq \frac{b_n}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i} \geq \frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. Giả sử dãy các số nguyên không âm $a_1, a_2, ..., a_{1997}$ thỏa mãn $a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1,\ \forall i, j \geq 1$ và $i + j \leq 1997$. Chứng minh rằng tồn tại số thực x sao cho $a_n = [nx]$ với mọi $1 \leq n \leq 1997$ (trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Lời giải. Ta phải chỉ ra tồn tại $x \in \left[\frac{a_n}{n}; \frac{a_n+1}{n}\right), \forall 1 \leq n \leq 1997$. Do vậy cần chỉ ra sự tồn tại của x với 1997 phần tử của dãy thì các đoạn là giao nhau, tức là với mọi m, n thì $\frac{a_n+1}{n} \geq \frac{a_m}{m}$.

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp theo $m+n$.

Nếu $m+n=2 \Leftrightarrow m=n=1$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

+) Nếu $m = n$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng

+) Nếu $n > m \Rightarrow n = mq + r,\ 0 < r < m$. Do đó $m + r < n + m$ và từ giả thiết quy nạp suy ra

$\frac{a_r+1}{r} \geq \frac{a_m}{m} \Rightarrow a_{mq+r} + 1 \geq qa_m + a_r + 1 = qa_m + r.\frac{a_r+1}{r} \geq qa_m + r.\frac{a_m}{m} = n.\frac{a_m}{m} \Rightarrow \frac{a_n+1}{n} \geq \frac{a_m}{m}$.

+) Nếu $n < m \Rightarrow m = nq + r,\ 0 < r < n$. Do đó $n + r < n + m$ lại theo giả thiết quy nạp suy ra

$\frac{a_r}{r} \leq \frac{a_n+1}{n} \Rightarrow na_m = na_{qn+r} \leq n(qa_n + a_r + q) \leq nqa_n + nq + nr.\frac{a_r}{r} \leq nqa_n + nq + nr.\frac{a_n+1}{n} =$

$= nqa_n + nq + ra_n + r = m(a_n+1) \Rightarrow \frac{a_m}{m} \geq \frac{a_n+1}{n}$.

Thí dụ 3. Cho dãy (u_n) các số nguyên dương thỏa mãn $0 \leq u_{m+n} - u_m - u_n \leq 2,\ \forall m, n \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực dương a_1, a_2 sao cho $[a_1 n] + [a_2 n] - 1 \leq u_n \leq [a_1 n] + [a_2 n] + 1,\ \forall n \leq 2017$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp với mọi m, n nguyên dương thì

$$mu_n < n(u_m + 2) \quad (1) \quad \text{(hay } \frac{u_n}{n} < \frac{u_m+2}{m} \text{ như thí dụ 2)}$$

Với $m+n=2 \Rightarrow m=n=1$, (1) trở thành $u_1 < u_1 + 2$, ta thấy (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $\forall m+n$ mà $2 \leq m+n < k$. Ta chứng minh (1) đúng với $m+n=k$. Thật vậy

+) Nếu $m = n$ thì (1) trở thành $mu_m < m(u_m+2)$, bất đẳng thức này đúng.

+) Nếu $m > n$. Xét cặp số $(m-n, n)$, ta có $m-n+n = m < m+n = k$. Do đó theo giả thiết quy nạp thì

$(m-n)u_n < n(u_{m-n}+2)$. Mặt khác từ điều kiện của đề bài $u_n + u_{m-n} \leq u_m$ suy ra

$n(u_n + u_{m-n}) \leq nu_m \Rightarrow (m-n)u_n + n(u_n + u_{m-n}) < n(u_{m-n}+2) + nu_m \Rightarrow mu_n < n(u_m+2)$.

+) Nếu $m < n$. Xét cặp số $(m, n-m)$, ta có $m + n - m = n < m + n = k$. Do đó theo giả thiết quy nạp có

$mu_{n-m} < (n-m)(u_m+2)$. Mặt khác, từ điều kiện đề bài $u_n \leq u_{n-m} + u_m + 2$ suy ra $mu_n \leq m(u_{n-m} + u_m + 2)$. Thành thử

$mu_{n-m} + mu_n < (n-m)(u_m+2) + m(u_{n-m} + u_m + 2) \Rightarrow mu_n < n(u_m+2)$.

Trở lại bài toán : Từ (1) suy ra $\frac{u_n}{n} < \frac{u_m+2}{m}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$K=\max_{1\le n\le 2017}\left(\frac{u_n}{n}-1\right)=\frac{u_p}{p}-1;\ L=\min_{1\le n\le 2017}\left(\frac{u_n+2}{n}-1\right)=\frac{u_q+2}{q}-1.$$

Do (1) có $\frac{u_p}{p}<\frac{u_q+2}{q}\Rightarrow K<L.$ Do $u_1\ge 1$ nên $k\ge\frac{u_1}{1}-1\ge 0.$ Vậy $0\le K<L.$ Chọn $a_1=1, a_2\in(K;L).$ Với mọi $1\le n\le 2017,$ ta có

+) $a_2n<Ln\le\left(\frac{u_n+2}{n}-1\right)n=u_n+2-n\Rightarrow[a_2n]\le u_n-n+1.$ Do đó

$[a_1n]+[a_2n]-1=n-1+[a_2n]\le n-1+u_n-n+1=u_n.$

+) $a_2n>Kn\ge\left(\frac{u_n}{n}-1\right)n=u_n-n\Rightarrow[a_2n]\ge u_n-n$ (do $u_n-n\in\mathbb{Z}$ và $a_2n>u_n-n$).

Vậy $[a_1n]+[a_2n]+1=n+1+[a_2n]\ge n+1+u_n-n=u_n+1>u_n.$

Thí dụ 4. Dãy các số thực $x_1,x_2,...$ thỏa mãn $|x_{m+n}-x_m-x_n|\le 1,\ \forall m,n=1,2,....$ Chứng minh rằng

$$\left|\frac{x_m}{m}-\frac{x_n}{n}\right|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ \forall m,n=1,2,...$$

Lời giải. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh $|x_{mn}-nx_m|<n\ (1).$

Với $n=1$ ta có $|x_m-x_m|=0<1,$ khẳng định (1) đúng. Giả sử (1) đúng cho $n,$ khi đó $\left|x_{m(n+1)}-(n+1)x_m\right|\le|x_{mn+m}-x_{mn}-x_m|+|x_{mn}-nx_m|<1+n,$ do đó (1) đúng cho $n+1.$ Từ đó ta có

$$|mx_n-nx_m|\le|x_{mn}-mx_n|+|x_{mn}-nx_m|<m+n\Rightarrow\left|\frac{x_m}{m}-\frac{x_n}{n}\right|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\forall m,n=1,2,...$$

Thí dụ 5. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ Chứng minh rằng tồn tại hàm cộng tính $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x)-g(x)|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$

Lời giải. Theo thí dụ 4 thì dãy $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ là dãy Cauchy nên nó là dãy hội tụ. Cố định $x,$ xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_n=f(nx),n\in\mathbb{N}^*.$ Theo giả thiết ta có $|x_{m+n}-x_m-x_n|\le 1,\ \forall m,n=1,2,....$ Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(nx)}{n}.$ Ta sẽ chứng minh g là cộng tính. Thật vậy, từ giả thiết ta có

$-1\le f(nx+ny)-f(nx)-f(ny)\le 1\Rightarrow-\frac{1}{n}\le\frac{f(n(x+y))}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\le\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*,$ cho $n\to+\infty,$ ta được $g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$ Mặt khác, theo nhận xét trên thì

$$-n+1\le f(nx)-nf(x)\le n-1\Rightarrow-1+\frac{1}{n}\le\frac{f(nx)}{n}-f(x)\le 1-\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Cho $n\to+\infty,$ ta được $-1\le g(x)-f(x)\le 1\Rightarrow|f(x)-g(x)|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$

Trên đây, chúng tôi đã giới thiệu một cách cơ bản về khái niệm dãy số Cộng tính dưới cũng như một số thí dụ có liên quan. Rất hy vọng bạn đọc sẽ khai thác thêm nhiều tính chất cho dãy số thú vị này. Sau cùng chúng tôi giới thiệu thêm một số bài tập để bạn đọc tự luyện tập.

1. Cho số thực $C>1$ và dãy số thực dương $(a_n)_{n\ge 1}$ có $a_1=1,\ a_2=2$ thỏa mãn các điều kiện sau $a_{mn}=a_ma_n$ và $a_{m+n}\le C(a_n+a_m),\ m,n=1,2,....$

Chứng minh rằng $a_n = n, \forall n = 1, 2, ...$

2. Cho $c > 2$, $a_1, a_2, ...$ là dãy các số thực không âm sao cho $a_{m+n} \le 2a_m + 2a_n, \forall m, n \ge 1$ và $a_{2^k} \le \dfrac{1}{(k+1)^c}, \forall k \ge 0$. Chứng minh rằng dãy số $(a_n)_{n\ge 1}$ bị chặn.

3. Xét dãy số thực $x_1, x_2, x_3, ...$ thỏa mãn $|x_{m+n} - x_m - x_n| < \dfrac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số đã cho là một cấp số cộng.

4. Cho dãy số thực $(a_n)_{n\ge 1}$ thỏa mãn $a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1, \forall m, n \ge 1$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \omega$ và $\omega n - 1 < a_n < \omega n + 1, \forall n \ge 1$.

5. Cho dãy số thực $(u_n)_{n\ge 1}$ sao cho $\begin{cases} u_n \ge 1, \forall n = 1, 2, ... \\ u_{m+n} \le u_m u_n, \forall m, n = 1, 2, ... \end{cases}$ và dãy số $(v_n)_{n\ge 1}$ xác định bởi

$v_n = \dfrac{\ln u_n}{n}, \forall n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng $(v_n)_{n\ge 1}$ hội tụ và giới hạn của nó là $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (v_n)$.