DÃY SỐ LỒI

Kiều Đình Minh – Nguyễn Tiến Long, THPT chuyên Hùng Vương, Phú thọ

Dãy số lồi đã từng xuất hiện trong những năm 70 của thế kỷ trước nhưng chưa được quan tâm đúng mức, mặc dù dãy số này cũng có những ứng dụng nhất định. Ngày nay người ta cũng đã nghiên cứu khá nhiều về dãy số lồi và các mở rộng của nó. Trong bài báo này chúng tôi muốn trình bày một cách cơ bản, có hệ thống và tương đối đầy đủ các kiến thức cơ sở về dãy số lồi cũng như những áp dụng của nó trong việc giải các bài toán thi Olympic.

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Dãy các số thực $(a_n)_1^{+\infty}$ được gọi là lồi nếu $a_{k-1}+a_{k+1}\ge 2a_k$ với mọi $k\ge 2$ và gọi là lõm nếu thỏa mãn $a_{k-1}+a_{k+1}\le 2a_k$ với mọi $k\ge 2.$

Định nghĩa 2. Dãy số dương $(a_n)_1^{+\infty}$ được gọi là lồi lôgarit nếu $a_{k+1}a_{k-1}\ge a_k^2,\forall k\ge 2$ và gọi là lõm lôgarit nếu $a_{k+1}a_{k-1}\le a_k^2,\forall k\ge 2.$

2. TÍNH CHẤT

Định lý 1. Cho dãy số lồi (a_n), khi đó với mọi $n>l\ge k\ge 1$ thì $a_{n-l}+a_{n+l}\ge a_{n-k}+a_{n+k}.$

Chứng minh: Đặt $\Delta a_i=a_{i+1}-a_i, i\ge 1,$ suy ra $\Delta a_{i+1}\ge \Delta a_i,\forall i\ge 1.$ Ta có

$$a_{n+l}-a_{n+k}=\sum_{i=n+k}^{n+l-1}\Delta a_i;\ a_{n-k}-a_{n-l}=\sum_{i=n-l}^{n-1-k}\Delta a_i$$

Vì $\Delta a_{i+1}\ge \Delta a_i,\forall i\ge 1,$ nên suy ra $\sum_{i=n+k}^{n+l-1}\Delta a_i\ge \sum_{i=n-l}^{n-1-k}\Delta a_i.$ Do đó $a_{n-l}+a_{n+l}\ge a_{n-k}+a_{n+k}.$

Định lý 2. Với mọi dãy số lồi (a_n), thì $\max\{a_1,a_2,...,a_n\}=\max\{a_1,a_n\}.$

Chứng minh.

- Nếu với mọi $k\ge 1,$ ta có $a_k\ge a_{k+1},$ khi đó $\max\{a_1,a_2,...,a_n\}=a_1=\max\{a_1;a_n\}.$
- Nếu tồn tại k nhỏ nhất, $k\ge 1$ thoả mãn $a_k<a_{k+1},$ ta có:

$a_k+a_{k+2}\ge 2a_{k+1}\Rightarrow a_{k+1}\le a_{k+2}\Rightarrow a_k<a_{k+1}<a_{k+2}<...<a_n.$ Mặt khác ta có $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_k.$

Như vậy, ta suy ra $\max\{a_1,a_2,...,a_n\}=\max\{a_1;a_n\}.$

Trong cả 2 trường hợp, ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3. Cho $(a_n)_1^{+\infty}$ lồi và bị chặn. Khi đó

a) $a_1\ge a_2;$

b) $(a_n)_1^{+\infty}$ hội tụ đến một giới hạn hữu hạn a ;

Chứng minh

a) Đặt $\Delta a_1=a_2-a_1=t.$ Giả sử $t>0.$ Từ giả thiết ta có

$a_{n+1}-a_n>a_n-a_{n-1}>a_{n-1}-a_{n-2}>...>a_2-a_1=t,$ suy ra $a_{n+1}>a_n+t>a_{n-1}+2t>...>a_1+nt.$

Do $t>0$ nên cho $n\to+\infty,$ thì $a_{n+1}\to+\infty,$ mâu thuẫn với tính bị chặn của $(a_n)_1^{+\infty}$. Vậy $t\le 0$ hay $a_1\ge a_2.$

b) Theo trên dễ suy ra $(a_n)_1^{+\infty}$ giảm. Lại vì $(a_n)_1^{+\infty}$ bị chặn nên nó có giới hạn hữu hạn.

3. MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1. Cho $(a_n)_0^{+\infty}$ là một dãy số lồi. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1+a_3+...+a_{2n-1}}{n}\le\frac{a_0+a_2+...+a_{2n}}{n+1}$$

Lời giải

Ta chứng minh bằng quy nạp. Với $n=1,$ kết luận đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n,$ ta chứng minh với $n+1,$ hay

$$(n+2)(a_1+a_3+...+a_{2n+1})\le(n+1)(a_0+a_2+...+a_{2n+2})$$

Do $(n+1)(a_1+a_3+...+a_{2n-1})\le n(a_0+a_2+...+a_{2n})$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$a_1+a_3+...+a_{2n-1}+(n+2)a_{2n+1}\le a_0+a_2+...+a_{2n}+(n+1)a_{2n+2}$$

Điều này đúng vì theo định lý 1 và định nghĩa ta có

$$\begin{cases}a_1+a_{2n+1}\le a_0+a_{2n+2}\\ a_3+a_{2n+1}\le a_2+a_{2n+2}\\ ...\\ a_{2n-1}+a_{2n+1}\le a_{2n-2}+a_{2n+2}\\ a_{2n+1}+a_{2n+1}\le a_{2n}+a_{2n+2}\end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được điều phải chứng minh.■

Thí dụ 2. Cho $(a_i)_1^n$ là một dãy lồi, đặt $A_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i.$ Chứng minh rằng $(A_k)_1^n$ cũng là một dãy lồi.

Lời giải

Cách 1: Định nghĩa $f(k)=k(k+1)(k-1)(2A_k-A_{k+1}-A_{k-1}),k=2,3,...,n-1.$ Từ giả thiết suy ra

$$f(k)-f(k-1)=k(k+1)(k-1)(2A_k-A_{k+1}-A_{k-1})-(k-1)k(k-2)(2A_{k-1}-A_k-A_{k-2})$$

$$=2(k-1)(k+1)\sum_{i=1}^{k}a_i-k(k-1)\sum_{i=1}^{k+1}a_i-k(k+1)\sum_{i=1}^{k-1}a_i-2k(k-2)\sum_{i=1}^{k-1}a_i+(k-1)(k-2)\sum_{i=1}^{k}a_i+k(k-1)\sum_{i=1}^{k-2}a_i$$

$$=k(k-1)(2a_k-a_{k+1}-a_{k-1})\le0$$

Tức là $f(k)\le f(k-1),k=3,4,...,n-1.$ Vì vậy

$f(k)\le f(k-1)\le...\le f(2)=6(2a_2-a_3-a_1)\le0,$ suy ra $2A_k\le A_{k+1}+A_{k-1},k=2,3,...,n-1.$■

Cách 2 : Chứng minh bằng quy nạp :

Với $k=1$ thì ta dễ dàng có điều phải chứng minh do dãy a_n lồi.

Giả sử khẳng định đúng đến l, ta có :

$$A_{k-1}+A_{k+1}\ge2A_k,\forall k\le l\Leftrightarrow(k^2-k)a_{k+1}+2(a_1+a_2+...+a_{k-1})\ge(k^2+k-2)a_k,\forall k\le l$$

Ta chứng minh $A_l+A_{l+2}\ge2A_{l+1}\Leftrightarrow(l^2+1)a_{l+2}+2(a_1+a_2+...+a_l)\ge(l^2+3l)a_{l+1}.$

Thật vậy, do giả thiết quy nạp :

$$(l^2-1)a_{l+1}+2(a_1+a_2+...+a_{l-1})\ge(l^2+1-2)a_1\Rightarrow(l^2+1)a_{l+2}+2(a_1+a_2+...+a_{l-1}+a_l)+(l^2-1)a_{l+1}\ge$$

$$\ge(l^2+1)(a_{l+2}+a_l)\ge(2l^2+2l)a_{l+1}\Rightarrow(l^2+1)a_{l+2}+2(a_1+a_2+...+a_l)\ge(l^2+3l)a_{l+1}.$$

Vậy có điều phải chứng minh.■

Thí dụ 3 (Baltic Way 2014) Cho dãy số $(a_i)_0^n\ (n\ge3)$ với $a_0=a_n=0$ thỏa mãn

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2,\ i=1,2,...,n-1.$$

Chứng minh rằng $a_i \le 0, i = 1, 2, ..., n-1.$

Lời giải

Giả thiết suy ra dãy đã cho lồi. Áp dụng định lý 2 ta có ngay $a_i \le 0, \forall i = 0, 1, 2, ..., n.$ ■

Thí dụ 4 (IMO SL 1988). Cho $(a_k)_1^{+\infty}$ là dãy các số thực lồi không âm sao cho $\sum_{j=1}^{k} a_j \le 1, \forall k = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng

$$0 \le (a_k - a_{k+1}) < \frac{2}{k^2}, \forall k = 1, 2, ...$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra dãy a_n bị chặn, từ đó áp dụng định lý 3 , ta suy ra $a_k \ge a_{k+1}$, mọi k. Vì vậy $a_k - a_{k+1} \ge 0, \forall k.$

Giả sử tồn tại k sao cho $a_k - a_{k+1} \ge \frac{2}{k^2}$.Thế thì với $\forall i < k,$ ta có

$$a_i > \frac{2(k+1-i)}{k^2}, i = 1, 2, ..., k.$$

Suy ra

$$a_1 + a_2 + ... + a_k > \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^2} + ... + \frac{2k}{k^2} = \frac{k(k+1)}{k^2} > 1,$$ điều này là không thể.

Vì vậy

$$a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}, \forall k. \blacksquare$$

Thí dụ 5 (IMO LL 1978) Tìm một số $c > 0$ sao cho với mọi dãy lõm dương $(a_k)_{k=1}^{n}$ ta đều có

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \ge c(n-1)\sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức trong đề bài tương đương với

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge c(n-1)\sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

Trong $2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j$ chứa các số có dạng

$$a_i(a_{i-j} + a_{i+j}) \ge \frac{(a_{i-j} + a_{i+j})^2}{2} > \frac{1}{2}a_{i-j}^2 + \frac{1}{2}a_{i+j}^2, \forall i \ge j \ge 1.$$

Với mọi $i,$ ta xét có bao nhiêu cặp dạng trên

+) $1 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$. Có các cặp $(a_{i-1}, a_{i+1}), (a_{i-2}, a_{i+2}), ..., (a_0, a_{2i})$. Suy ra

$$a_i^2 + a_i(a_{i-1} + a_{i+1}) + ... + a_i(a_0 + a_{2i}) > a_i^2 + \frac{1}{2}(a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + ... + a_0^2 + a_{2i}^2) = \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}\left(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^2\right)$$

+) $\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le i \le n-1$. Có các cặp $(a_n, a_{2i-n}), (a_{n-1}, a_{2i-n+1}), ..., (a_{i+1}, a_{i-1})$. Suy ra

$$a_i^2+a_i\left(a_{i-1}+a_{i+1}\right)+\ldots+a_i\left(a_n+a_{2i-n}\right)>\frac{1}{2}a_i^2+\frac{1}{2}\left(a_{2i-n}^2+\ldots+a_n^2\right)$$

Vậy

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)^2\geq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{2\left[\frac{i}{2}\right]}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\left(a_{2i-n}^2+\ldots+a_n^2\right)$$

Nếu n chẵn thì ta có

$$VP\geq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{2i}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}\left(a_{2i-n}^2+\ldots+a_n^2\right)>\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}.\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2=\frac{n+2}{4}\sum_{k=0}^{n}a_k^2$$

Nếu n lẻ thì ta có

$$VP\geq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{2i}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(a_{2i-n}^2+\ldots+a_n^2\right)>\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}.\frac{n-1}{2}\sum_{k=0}^{n}a_k^2=\frac{n+1}{4}\sum_{k=0}^{n}a_k^2$$

Do đó, ta có thể chọn $c=\frac{1}{4}$.■

Thí dụ 6 (China 2009) Cho dãy số lồi $(a_k)_1^n\ (n\geq 3)$ sao cho $\sum_{i=1}^{n}a_i=0.$ Tìm biểu thức $f(n)$ bé nhất sao cho với mọi $k\in\{1,2,\ldots,n\},$ ta có $|a_k|\leq f(n)\max\{|a_1|;|a_n|\}.$

Lời giải

Trước hết, định nghĩa dãy (a_k) như sau :

$$a_1=1,a_2=-\frac{n+1}{n-1}\text{ và }a_k=-\frac{n+1}{n-1}+\frac{2n(k-2)}{(n-1)(n-2)},k=3,4,\ldots,n.$$

Thì $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ và $2a_k\leq a_{k-1}+a_{k+1},k=2,3,\ldots,n-1.$ Trong trường hợp này, dễ kiểm tra rằng $f(n)\geq\frac{n+1}{n-1}.$

Tiếp theo, giả sử (a_k) là dãy thỏa mãn bài toán. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$a_k\leq\frac{n+1}{n-1}\max\{|a_1|,|a_n|\},\forall k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

Do (a_k) lồi nên $a_n-a_{n-1}\geq a_{n-1}-a_{n-2}\geq\ldots\geq a_2-a_1.$ Suy ra

$$(k-1)(a_n-a_1)=(k-1)\left[(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)\right]\geq$$
$$\geq(n-1)\left[(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\ldots+(a_2-a_1)\right]=(n-1)(a_k-a_1)$$

Suy ra

$$a_k\leq\frac{k-1}{n-1}(a_n-a_1)+a_1=\frac{1}{n-1}\left[(k-1)a_n+(n-k)a_1\right]\quad(1)$$

Tương tự, với k cố định tùy ý, $k\notin\{1,n\}$ và với $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ tùy ý, ta có

$$a_j\leq\frac{1}{k-1}\left[(j-1)a_k+(k-j)a_1\right]$$

Vì vậy, với $j\in\{k,k+1,\ldots,n\},$ ta có

$$a_j\leq\frac{1}{n-1}\left[(j-k)a_n+(n-j)a_k\right]$$

Hệ quả, ta có

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \le \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}\left[(j-1)a_k+(k-j)a_1\right]=\frac{k}{2}(a_1+a_k),$$

$$\sum_{j=k}^{n} a_j \le \frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n}\left[(j-k)a_n+(n-j)a_k\right]=\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n).$$

Lấy tổng của hai bất đẳng thức trên, ta được

$$a_k=\sum_{j=1}^{k} a_j+\sum_{j=k}^{n} a_j \le \frac{k}{2}(a_1+a_k)+\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n)=\frac{k}{2}a_1+\frac{n+1}{2}a_k+\frac{n+1-k}{2}a_n.$$

Vì vậy, ta có

$$a_n \ge -\frac{1}{n-1}\left[ka_1+(n+1-k)a_n\right] \quad (2)$$

Từ $(1)\&(2)$, với $k=2,3,...,n-1,$ ta được

$$|a_k| \le \max\left\{\frac{1}{n-1}\left|(k-1)a_n+(n-k)a_1\right|;\frac{1}{n-1}\left|ka_1+(n+1-k)a_n\right|\right\} \le \frac{n+1}{n-1}\max\left\{|a_1|;|a_n|\right\}$$

Tóm lại : $f(n)$ bé nhất bằng $\frac{n+1}{n-1}$.■

Thí dụ 7 (USA MO 1993) Cho $a_0,a_1,a_2,...$ là dãy lõm lôgarit. Chứng minh rằng

$$\frac{a_0+a_1+...+a_n}{n+1}.\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} \ge \frac{a_0+a_1+...+a_{n-1}}{n}.\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}, \forall n>1$$

Lời giải

Bổ đề 1 : $\frac{a_k^{k+1}}{a_{k+1}^{k}} \ge a_0, \forall k \in \mathbb{N}$

Chứng minh : Ta chứng minh bổ đề bằng quy nạp. Với $k=1$ thì hiển nhiên đúng $a_1^2 \ge a_0a_2$. Giả sử bất đẳng thức đúng đến $k=j,$ ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng đến $k=j+1.$

Thật vậy $\frac{a_j^{j+1}}{a_{j+1}^{j}} \ge a_0 \Rightarrow a_{j+1}^{j+2} \ge \frac{a_{j+1}^{2(j+1)}}{a_j^{j+1}}a_0 \Rightarrow a_{j+1}^{j+2} \ge a_{j+2}^{j+1}a_0 \Rightarrow \frac{a_{j+1}^{j+2}}{a_{j+2}^{j+1}} \ge a_0.$

Bổ đề 2 : $a_1a_2a_3...a_{n-1} \ge (a_0a_n)^{\frac{n-1}{2}}, \forall n \ge 2$

Chứng minh : Ta chứng minh bổ đề bằng quy nạp.

Với $n=2$ thì $a_1^2 \ge a_0a_2 \Rightarrow a_1 \ge (a_0a_2)^{\frac{1}{2}}$. Giả sử khẳng định đúng đến $n=m.$ Ta chứng minh khẳng định đúng đến $n=m+1.$ Thật vậy

$$a_1a_2a_3...a_{m-1} \ge (a_0a_m)^{\frac{m-1}{2}} \Rightarrow a_1a_2a_3...a_{m-1}a_m \ge a_0^{\frac{m-1}{2}}a_m^{\frac{m+1}{2}} \quad (1)$$

Theo bổ đề 1 ta có

$$\frac{a_m^{m+1}}{a_{m+1}^{m}} \ge a_0 \Rightarrow \frac{a_m^{\frac{m+1}{2}}}{a_{m+1}^{\frac{m}{2}}} \ge a_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 \ge \frac{a_0^{\frac{1}{2}}a_{m+1}^{\frac{m}{2}}}{a_m^{\frac{m+1}{2}}} \quad (2)$$

Lấy (1) và (2) nhân vế theo vế, ta được

$$a_1a_2a_3...a_m \ge a_0^{\frac{m}{2}}a_{m+1}^{\frac{m}{2}}=(a_0a_{m+1})^{\frac{(m+1)-1}{2}}.$$

Quay trở lại bài toán : Ta viết kết quả bổ đề 2 như sau

$$\left(a_1a_2a_3...a_{n-1}\right)^{\frac{2}{n-1}} \ge a_0a_n \Leftrightarrow \left(a_1a_2a_3...a_{n-1}\right)^{\frac{2n}{n^2-1}} \ge \left(a_0a_n\right)^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow \left(a_0a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(a_1a_2...a_{n-1}\right)^{\frac{2n}{n^2-1}} \ge a_0a_n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n^2-1]{a_0^{n-1}a_1^{2n}a_2^{2n}a_3^{2n}...a_{n-1}^{2n}a_n^{n-1}} \ge a_0a_n$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, suy ra

$$\frac{\left(a_0+a_1+...+a_n\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1} \ge a_0a_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)} \ge \frac{a_0a_n}{n^2} - \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)} \ge \frac{a_0a_n}{n^2} + \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2} - \frac{a_n\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1} + \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1} \ge \frac{\left(a_0+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2} + \frac{a_n\left(a_0+...+a_{n-1}\right)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_0+...+a_{n-1}}{n+1}+\frac{a_n}{n+1}\right)\left(\frac{a_1+...+a_{n-1}}{n-1}\right) \ge \left(\frac{a_0+...+a_{n-1}}{n}\right)\left(\frac{a_1+...+a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_0+a_1+...+a_n}{n+1}.\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} \ge \frac{a_0+...+a_{n-1}}{n}.\frac{a_1+...+a_n}{n}.$$

.■

Trên đây là một số thí dụ cơ bản về dãy số lồi. Để hiểu thêm về vấn đề này xin mời bạn đọc luyện tập qua một số bài tập sau

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (IMO SL 1975) Cho $\left(a_n\right)_1^{+\infty}$ là dãy số lồi sao cho $0 \le a_n \le 1$. Chứng minh rằng

$$0 \le (n+1)\left(a_n - a_{n+1}\right) \le 2, n = 1,2,3,...$$

Bài 2 (IMO LL 1978) Giả sử $\left(b_n\right)(n=0,1,...)$ là một dãy các số dương sao cho $\left(\alpha^n b_n\right)(n=0,1,...)$ lồi với cách chọn $\alpha > 0$ tùy ý. Chứng minh rằng dãy $\left(\log b_n\right)(n=0,1,...)$ là lồi.

Bài 3 (IMO LL 1978) Chứng minh rằng $c = \frac{3}{4}$ là hằng số tốt nhất thỏa mãn

$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)^2 \ge c(N-1)\sum_{n=0}^{N} a_n^2$ với mọi dãy dương lõm $\left(a_n\right)(n=0,1,...,N)$.

Bài 4 (IMO SL 1976) Cho $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ là dãy các số thực thỏa mãn điều kiện sau $a_0 = a_{n+1} = 0$ và $\left|a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}\right| \le 1, k = 1,2,...,n.$

Chứng minh rằng $\left|a_k\right| \le \frac{k(n+1-k)}{2}, \forall k = 0,1,...,n+1.$

Bài 5 (Baltic Way 1994) Cho $a_1, a_2, ..., a_9$ là các số thực không âm và $a_1 = a_9 = 0$ và ít nhất một trong các số này khác 0. Chứng minh rằng có chỉ số $i, 2 \le i \le 8$ sao cho $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. Phát biểu còn đúng không khi thay số 2 trong bất đẳng thức bởi $1,9$?

Bài 6 (China TST 2008) Tìm hằng số M lớn nhất sao cho với số nguyên $n \ge 3$ tùy ý, tồn tại hai dãy các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn đồng thời

a) $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1;\ 2b_k \ge b_{k-1} + b_{k+1}, k = 2,3,...,n-1;$

b) $a_k^2 \le 1+\sum_{i=1}^{k} a_i b_i, k=1,2,...,n;\ a_n \equiv M.$

Bài 7 (China TST 2009) Cho số nguyên $n \ge 2.$ Tìm hằng số $\lambda(n)$ lớn nhất có tính chất sau: Nếu dãy các số thực lõm $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn $0 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right)^2 \ge \lambda(n)\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Chikkanna R. Selvaraj, Suguna Selvaraj, *Summability Matrices and Mean – Convex Sequense*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.8, 2013, No. 19

[2]. Feng Qi, Bainiguo, *Monotonicity of Sequences Involving Convex Function and Sequence*, 2000 Mathematics Subject Classification.

[3]. Katarina Nicova, *A Note On Higher – Order Convexity of Sequences*, Int. J. of Pure and Applied Mathematics, Volume 83 No. 1, 2013

[4]. Lily L.Liu, Yi Wang, *On the log – Convexity of Combinatorial Sequenses*, Partially Supported by NSF of China 10471016

[5]. A. McD. Mercer, *Polynomials and Convex Sequence Inequalities*, Journal of Inequalities In Pure and Applied Mathematics, Volume 6, Issue 1, Article 8, 2005

[6]. Moussa Ahmia, Hacine Belbachir, *Preserving log – convexity for Generalized Pascal triangles*, The Electronic Journal of Combinatorics 19(2) (2012)

[7]. Shanhe Wu, Lokenath Debnath, *A Computers and Mathematics with Applications* 54 (2007)

[8]. Zinelabidine LaTreuch, Benharrat Belaidi, *New Inequalities for Convex Sequences*

[9]. IMO Shortlist (1959 – 2016)

[10]. Diễn đàn AoPS.