SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG **ĐỀ THI THÁNG LẦN 4 NĂM HỌC 2022 - 2023**

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI **MÔN TOÁN – 10**

Thời gian làm bài :180 Phút

Câu 1. **(2,0 điểm)** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1+x+y}{x-y} = 2-x-y \\ \dfrac{x^2+1-y^2}{(x+y)^2} = 7-(x-y)^2 \end{cases}$ $(x > y; x+y > 0)$

Câu 2. **(2,0 điểm)** Cho các số a,b,c dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^6}{b^2+c^2}+\dfrac{b^6}{a^2+c^2}+\dfrac{c^6}{b^2+a^2} \ge \dfrac{abc(a+b+c)}{2}$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và tồn tại điểm P trên tia đối tia CA sao cho PB và PD tiếp xúc (O).

a) Chứng minh rằng $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{BC^2}{AB^2}$

b) Tiếp tuyến tại C cắt đường thẳng PD tại Q và đường thẳng AD tại R. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AQ và (O). Chứng minh rằng B,E,R thẳng hàng

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho tồn tại số tự nhiên m chia hết cho tất cả các số từ 1 đến n nhưng không chia hết cho $n+1, n+2, n+3$

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm số hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của $\{1,2,3,\ldots,n\}$ với $n \ge 2$) thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \le 1$ với mọi $i = 1,2,\ldots,n-1$.

b) Tìm số hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của $\{1,2,3,\ldots,n\}$ với $n \ge 2$) thỏa mãn điều kiện

(1): $a_{i+1} - a_i \le 1$ với mọi $i = 1,2,\ldots,n-1$ và đồng thời có (2): $a_i \ne i$ với mọi chỉ số $i = 1,2,..,n$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 4 LỚP 10 TOÁN NĂM HỌC 2022-2023

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1+x+y}{x-y} = 2-x-y \\ \dfrac{x^2+1-y^2}{(x+y)^2} = 7-(x-y)^2 \end{cases}$ $(x > y; x+y > 0)$

Lời giải:

Đặt $\dfrac{1}{x+y} = a, x-y = b$, được hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab} = 2 \\ a^2+ab+b^2 = 7 \end{cases}$ với điều kiện: b>0 và $a > 0$

Giải hệ đối xứng loại 1 trên, kết hợp điều kiện được (a,b)=(2,1); (1,2)

Từ đó có $(x,y) = (\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}); (\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4})$

Câu 2. Cho các số a,b,c dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^6}{b^2+c^2}+\dfrac{b^6}{a^2+c^2}+\dfrac{c^6}{b^2+a^2} \geq \dfrac{abc(a+b+c)}{2}$

Lời giải:

Áp dụng Cauchy Schwarz và $3(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3$

$$LHS \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{6} \geq \frac{abc(a+b+c)}{2}$$

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và tồn tại điểm P trên tia đối tia CA sao cho PB và PD tiếp xúc (O).

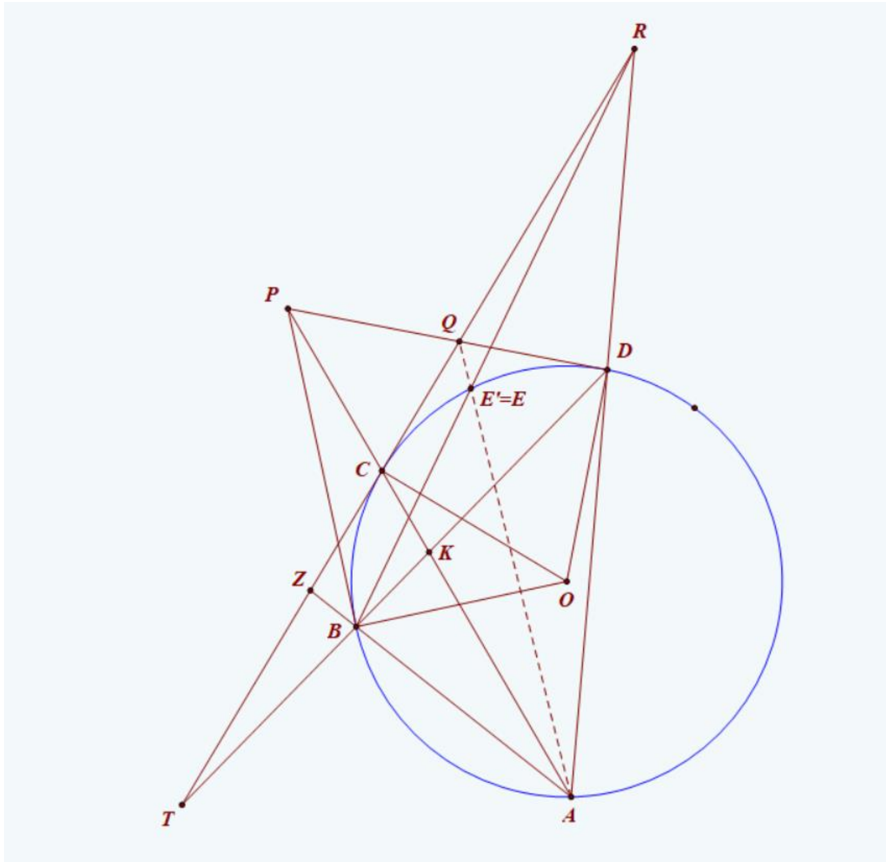
c) Chứng minh rằng $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{BC^2}{AB^2}$

d) Tiếp tuyến tại C cắt đường thẳng PD tại Q và đường thẳng AD tại R. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AQ và (O). Chứng minh rằng B, E, R thẳng hàng

Lời giải:

a) Tính chất quen thuộc

b)



Gọi BD cắt CR tại T và AB cắt CR tại Z, AC cắt BD tại K. Ta có ABCD là tứ giác điều hòa nên (T,K,B,D)=-1. Chiếu từ A lên CR được (T,C,Z,R)=-1. Chiếu từ B lên đường tròn, gọi BR cắt (O) tại E' thì (D, C, A, E')=-1 hay tứ giác ABCE' điều hòa, nghĩa là AE' là đường đối trung của tam giác ACD. Do đó AE' đi qua giao hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ACD, tức là A,E',Q thẳng hàng hay E' trùng E. Vậy B,E,R thẳng hàng.

Câu 4. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho tồn tại số tự nhiên m chia hết cho tất cả các số từ 1 đến n nhưng không chia hết cho $n+1, n+2, n+3$

Lời giải:

+) Với n=1,2,3, dễ dàng kiểm tra n=1,2 thỏa mãn

+) Với n>3

Nếu $n+1 \neq p^k$ với p nguyên tố thì tồn tại a, b thỏa mãn n+1>a,b> 1 sao cho ab=n+1, (a,b)=1, suy ra n+1 là ước của UCLN(1,2,…,n) (loại)

Vậy n+1 có dạng p^k

Tương tự n+2, n+3 cũng có dạng p^k

i) n lẻ. Khi đó $n+1=2^k$ và $2^k < n+3 < 2^{k+1}$ nên n+3 không thể có dạng 2^q, mà n+3 chẵn nên trường hợp này bị loại

ii) n chẵn thì n+2 chẵn thì $n+2=2^k, k>2$. Nếu k chẵn thì $n+1=x^2-1=(x+1)(x-1)=p^y$. Vô lý. Vậy k lẻ, suy ra $n+3=2^k+1 \equiv 0 (mod 3)$ nên $n+3=3^m$. Với lý do tương tự trên, m lẻ nên $2^k=n+2=3^m-1 \equiv 2 (mod 4)$. Ta được k=1 tức n=0 (loại)

Đáp số: n=1; n=2

Câu 5.

c) Tìm số hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ với $n \geq 2$) thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

d) Tìm số hoán vị $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ với $n \geq 2$) thỏa mãn điều kiện

(1): $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n-1$ và đồng thời có (2): $a_i \neq i$ với mọi chỉ số $i = 1, 2, .., n$

Lời giải:

a) Trước hết, ta sẽ đếm số các hoán vị thỏa mãn điều kiện (1). Gọi S_n là số các hoán vị dạng này. Giả sử $a_i = n$ thì do điều kiện $a_{i+1} - a_i \leq 1$ nên $a_{i-1} = n-1$ và cứ thế, suy ra $a_1 = n-i$, các số còn lại là $1, 2, 3, \ldots, n-i-1$ tạo thành hoán vị thỏa mãn điều kiện (1) nhưng có $n-i-1$ phần tử và là S_{n-i-1}. Do $1 \leq i \leq n$ nên ta có $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_{n-i} = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1}$. Ta cũng có $S_1 = 0, S_2 = 2$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được $S_n = 2^{n-1}$ với n ≥ 1.

b) Tiếp theo, ta sẽ tính số các hoán vị thỏa mãn điều kiện (1) nhưng không thỏa mãn điều kiện (2), tức là trong hoán vị có ít nhất một chỉ số i mà $a_i = i$. Ta thấy rằng nếu tồn tại $i \neq j$ mà $a_i = i, a_j = j$ thì với mọi k mà $i \leq k \leq j$ thì $a_k = k$. Gọi x, y lần lượt là số nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn $a_i = i, 1 \leq i \leq n$ với $1 \leq x < y \leq n$. Ta nhận xét rằng với các số a_k mà $k < x$ thì chỉ có thể nhận các giá trị từ $y+1$ đến n; tương tự, với các số a_k mà $k > y$ thì chỉ có thể nhận các giá trị từ 1 đến $x-1$. Khi đó, dễ thấy rằng nếu hai đại lượng $x-1, n-y$ khác nhau thì không thể tồn tại cách sắp xếp nên ta phải luôn có $x-1 = n-y$ hay $x+y = n+1$.

Với mỗi x mà $1 \leq x \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, tương tự cách tính số hoán vị thỏa mãn điều kiện (1) ở trên, ta thấy số hoán vị thỏa mãn là $2^{2(x-2)}$ nếu $x \geq 2$ và bằng 1 nếu $x = 1$. Khi đó, số hoán vị thỏa mãn điều kiện (1) nhưng không thỏa mãn điều kiện (2) là

$$1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 2^{2(x-2)} = 1 + \sum_{i=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} 4^{x-2} = 1 + \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - 1}{3} = \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2}{3}$$

Vậy số hoán vị cần tìm chính là $2^{n-1} - \frac{4^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} + 2}{3}$