SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ BA
NĂM HỌC 2022-2023
Môn: Toán lớp 11

Ngày thi: 19 – 12 – 2022

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (**2,0 điểm**) Tìm tham số m để hàm số $y=(\sin x)^3+\left(m^2+1\right)\sin x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Câu 2. (**2,0 điểm**) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn AI sao cho $AH=\frac{1}{2}HI$. Biết góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$.

a) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAI), với M là trung điểm của SC.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Câu 3. (**2,0 điểm**) Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $(C\in(O)$ và $D\in(O')$, đồng thời B,C,D nằm cùng phía có bờ là $OO')$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng BC và AD. F là giao điểm của hai đường thẳng BD và AC,G là giao điểm của hai đường thẳng EF và $AB;H$ là hình chiếu của G lên CD.

a) Chứng minh rằng $EF//CD$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{CAB}=\widehat{DAH}$

Câu 4. (**2,0 điểm**) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$ là một số nguyên.

Câu 5. (**2,0 điểm**) Cho các số thực dương a,b,c sao cho: $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{3.\sqrt{2}.\sqrt[4]{27}}\left(\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{bc+1}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{ca+1}\right)\ge\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}$$

HƯỚNG DẪN CHẤM

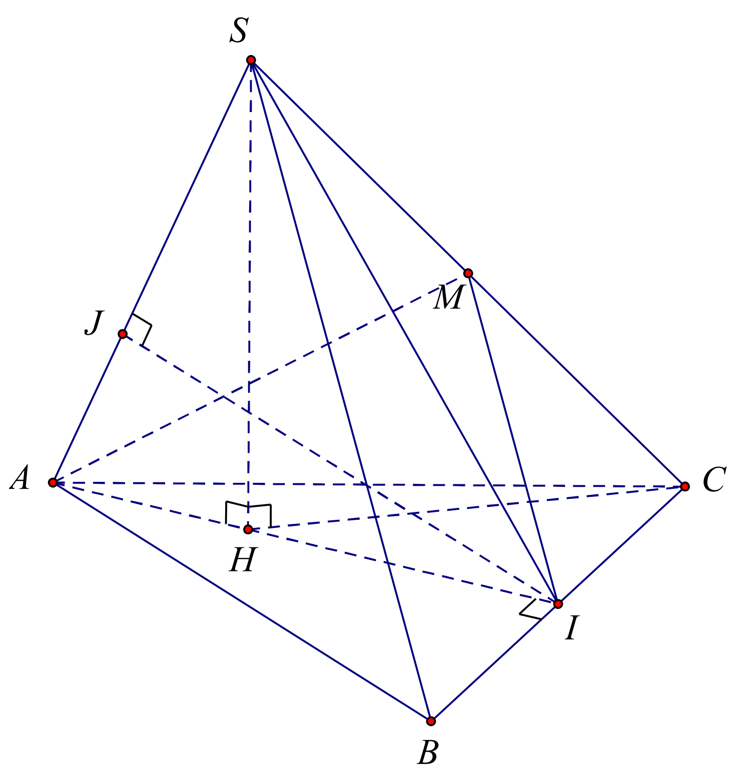
Câu 1:

+ Đặt $f\left(x\right)=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ ở đây $\sin x$ là x với $x\in[0;1]$

+ Ta có: $y'=3x^2+m^2+1$. Dễ thấy rằng $y'>0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\left[0;1\right]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y=\min\limits_{[0;1]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

Câu 2:



Có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ $\Rightarrow AI=a\sqrt{3}; AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}; HI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông CHI có: $HC=\sqrt{CI^2+HI^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Theo giả thiết: $\left(SC,\left(ABC\right)\right)=60°\Rightarrow \widehat{SCH}=60°$.

Trong tam giác vuông SCH có $\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\tan 60°\Rightarrow SH=HC.\tan 60°=a\sqrt{7}$.

a) Ta có M là trung điểm $SC\Rightarrow d\left(M,\left(SAI\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(M,\left(SAI\right)\right)$.

Lại có: $CI\perp\left(SAI\right)$ vì $\begin{cases} AI\perp AI\Rightarrow CI\perp AI \\ SH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow CI\perp SH\subset\left(SAI\right)\end{cases}\Rightarrow CI\perp\left(SAI\right)$.

Vậy $d\left(M,\left(SAI\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(C,\left(SAI\right)\right)=\dfrac{CI}{2}=\dfrac{a}{2}$.

b) Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên $SA \Rightarrow IJ \perp SA$.

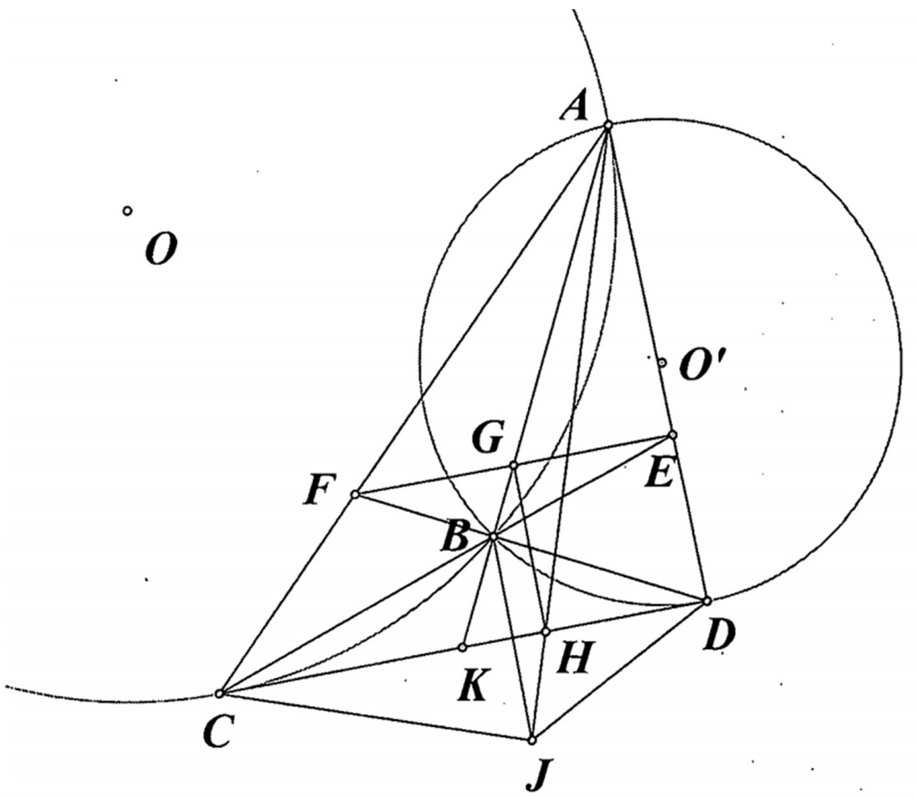
Mặt khác $BC \perp (SAI) \Rightarrow IJ \perp BC$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của hai đường SA và $BC \Rightarrow d(SA, BC) = IJ$.

Xét tam giác SAI có $SH.AI = IJ.SA \Rightarrow IJ = \dfrac{SH.AI}{SA} = \dfrac{a\sqrt{7}.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \dfrac{3\sqrt{154}a}{22}$.

Câu 3:

a)



Áp dụng định lý Ceva trong $\triangle ACD: \dfrac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \dfrac{\overline{EA}}{\overline{ED}} \cdot \dfrac{\overline{KD}}{\overline{KC}} = -1$ (1)

Vì CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên $KC^2 = KA \cdot KB = KD^2$.

Suy ra: $KC = KD (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{FC}{FA} = \dfrac{ED}{EA}$ suy ra $EF // CD$.

b)

Gọi K là giao điểm của AB và CD.

$\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{KC}{KB} \Rightarrow \triangle' KAC \sim \triangle KCB \Rightarrow \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{KA}{KC} (3)$

$\dfrac{KA}{KD} = \dfrac{KD}{KB} \Rightarrow \triangle KAD \sim \triangle KDB \Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{KA}{KD} (4)$

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB} (5)$

Từ $EF//CD \Rightarrow \triangle BKD \sim \triangle BGF \Rightarrow \dfrac{BG}{BK} = \dfrac{GF}{KD}$

Mà $\dfrac{AG}{AK} = \dfrac{FG}{CK} = \dfrac{GF}{KD}$

Do đó: $\dfrac{AG}{AK} = \dfrac{BG}{BK} \Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{GA}{GB}$ hay $(A,B,G,K) = -1$ (6)

Qua B kẻ đường thẳng song song với GH cắt AH tại J (7)

Mà $(JA,JB,JG,JK) = -1$ suy ra HK đi qua trung điểm của JB.

Mà $GH \perp CD$, $GH//JB$ suy ra $JB \perp CD$ hay $JB \perp HK$ suy ra J và B đối xứng với nhau qua HK hay $BC = JC; BD = DJ$ (8)

Từ (4) và (8) suy ra $\dfrac{AC}{JC} = \dfrac{AD}{JD}$ (9).

Vì CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên góc $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}; \widehat{BAD} = \widehat{BDC}$.

Lại có: $\widehat{CAD} + \widehat{CJD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} + \widehat{CBD} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ nên tứ giác $ACJD$ nội tiếp.

Theo định lý Ptoleme: $AJ.CD = AC.JD + AD.JC$

Theo (9) $AC.JD = AD.JC$

Ta có: $2AC.JD = AC.JD + AD \cdot JC = AJ.CD = 2AJ.CK$

Do đó: $\dfrac{AC}{CK} = \dfrac{AJ}{JD}$ mà $\widehat{ACK} = \widehat{AJD}$ nên $\triangle ACK \sim \triangle AJD$

Vậy $\widehat{KAC} = \widehat{DAJ}$ hay $\widehat{CAB} = \widehat{DAH}$.

Câu 4:

Ta có $\dfrac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$ là một số nguyên khi và chỉ khi $\left(n^2+1\right)(n+1) \mid 10^n$

$\left(n^2+1, n+1\right) = (2n, n+1) = (2, n+1) = 1$ hoặc 2

<u>TH1:</u> Nếu $\left(n^2+1, n+1\right) = 2$

Vì $\left(n^2+1\right)(n+1) \mid 10^n$ nên $\begin{cases} n+1 = 2^a \\ n^2+1 = 2 \cdot 5^b \end{cases}, a+1, b \le n$.

Suy ra $2^{2a} = (n+1)^2 = n^2+1+2n = 2 \cdot 5^b + 2 \cdot \left(2^a - 1\right)$

hay $2^a\left(2^{a-1}-1\right) = 5^b - 1$

Suy ra, $v_2\left(5^b - 1\right) = a$

Mặt khác, do $4 \mid 5-1$, nên theo bổ đề LTE ta có $v_2\left(5^b-1\right) = v_2(5-1) + v_2(b) = 2 + v_2(b)$

Nên $v_2(b) = a-2$. Do đó $b = 2^{a-2} \cdot k$, với k là số lẻ.

Từ (1) suy ra $5^b < 2^{2a-1}$ hay $5^{2^{a-2} \cdot k} < 2^{2a-1} \Rightarrow 4^{2^{a-2} \cdot k} < 2^{2a-1} \Rightarrow 2^{a-1}.k < 2a-1$. (2)

Với $a \ge 5$, ta có $2^{a-2} = (1+1)^{a-2} \ge C_{a-2}^{2} + C_{a-2}^{1} + 1 = \dfrac{(a-2)(a-3)}{2} + a - 2 + 1 > a$ nên (2)

không xảy ra.

Với $a \le 4$, bằng cách thử trực triếp thì chỉ có $(a;b) = (2;1);(3;2)$ thỏa mãn.

Suy ra $n \in \{3;7\}$.

<u>TH2:</u> Nếu $\left(n^2+1, n+1\right) = 1$

Vì $\left(n^2+1\right)(n+1) \mid 10^n$ nên $\begin{cases} n+1 = 1 \\ n^2+1 = 5^b \end{cases}$, suy ra $n = 0$.

Vậy $n \in \{3;7\}$.

Câu 5:

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3.\sqrt{2}.\sqrt[4]{27}} \sum_{cyc} \dfrac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1} \ge \sum_{cyc} \dfrac{a}{\left(a^2+1\right)abc} = \sum_{cyc} \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}$ $(*)$.

Ta thấy $VP(*) = \dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \dfrac{2abc}{8abc} = \dfrac{1}{4}$

Ta sẽ chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3.\sqrt{2}.\sqrt[4]{27}} \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1} \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1} \ge \frac{3.\sqrt{2}.\sqrt[4]{27}}{4} \quad (**)$$

Ta có BĐT : $9(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$. Thật vậy

$$\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\ge (a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Từ đó suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \dfrac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\ge \frac{8}{9}(a+b+c)\sqrt{3abc(a+b+c)} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(abc)^2 \qquad (1)$$

$+ a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \ge ab(a+b)$, tương tự $b^3+c^3 \ge bc(b+c)$ và

$c^3+a^3 \ge ca(c+a) \qquad (2)$

$+\ (ab+1)(bc+1)(ca+1) = \dfrac{1}{abc}(abc+c)(abc+b)(abc+a)$

$$\le \frac{1}{abc}\left(\frac{abc+c+abc+b+abc+a}{3}\right)^3 \le \frac{1}{abc}\left(\frac{4abc}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}(abc)^2 \quad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ kết hợp BĐT AM-GM ta có

$$VT^{(**)} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab(a+b).bc(b+c).ca(c+a)}}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^2b^2c^2\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot(abc)^2}}{\frac{64}{27}\cdot(abc)^2}} = \frac{3.3}{4}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3.\sqrt{2}.\sqrt[4]{27}}{4} = VP^{(**)}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$