SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ NĂM**
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi	**NĂM HỌC 2022-2023**
	Môn: Toán lớp 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (**3,0 điểm**)

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm B.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$

Câu 2. (**1,5 điểm**) Cho $a,b\in(0;1)$ và (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1=a \\ x_2=b \\ x_{n+2}=\dfrac{1}{n}x_{n+1}^2+\dfrac{n-1}{n}\sqrt{x_n}, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $x_n\in(0;1), \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Câu 3. (**2,0 điểm**) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi E,F,I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AD,BC),(AB,CD),(AC,BD)$. Gọi G,H là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với các đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và CEF

a) Chứng minh rằng các đường thẳng GH, AC, BD đồng quy.

b) Gọi Q là *điểm Miguel* của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Chứng minh rằng các đường thẳng OQ, AC, BD đồng quy và bốn điểm G,O,H,Q đồng viên.

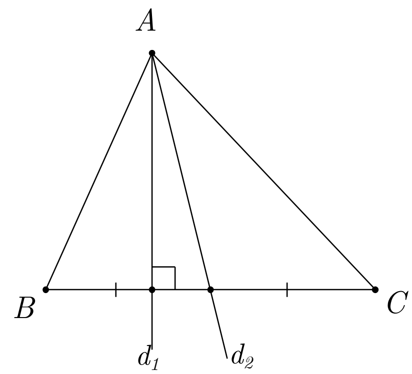
Câu 4. (**1,5 điểm**) Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xf(x)+2y)=f(x)^2+x+2f(y)$ với mọi số thực $x;y$

Câu 5. (**1,0 điểm**) Cho $a;b;c$ là các số nguyên dương. Biết rằng a^2+b^2+abc có không quá 2008 ước nguyên dương và $(c+2)^{1004}\mid a^2+b^2+abc$. Chứng minh rằng a và b không nguyên tố cùng nhau.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

a)



Ta có $A = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x-3y+12=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $A(-3;2)$

Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với d_1 nên có phương trình $3x+2y-10=0$.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $M = BC \cap d_2$ nên tọa độ điểm M là $(6;-4)$.

Suy ra $B(8;-7)$.

b) Điều kiện: $x \le \dfrac{3}{4}, y \le \dfrac{5}{2}$. Đặt: $t = \sqrt{5-2y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}(5-t^2)$, thay vào (1)của hệ ta có:

$\Leftrightarrow 4x^3 + x = t\left(3 - \dfrac{5-t^2}{2}\right) \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = t^3 + t$.

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \vee x \to f(x)$ đồng biến cho nên vế trái chẳng qua là khi t=2x. Do đó: $\sqrt{5-2y} = 2x \Leftrightarrow y = \dfrac{5-4x^2}{2}$. Thay vào phương trình (2) của hệ ta được: $g(x) = 4x^2 + \left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 0 \vee x \in \left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

Dễ thấy $x=0$ và $x = \dfrac{3}{4}$ không là nghiệm.

Ta xét: $g'(x) = 8x - 8x\left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2-3) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0 \vee x \in \left(0;\dfrac{3}{4}\right)$,

với: $g(\dfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}; y = 0$ là nghiệm của hệ

Câu 2:

a) Đầu tiên ta phải chứng minh $x_n \in (0;1), \forall n \in \mathbb{N}^*(1)$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n=1, n=2$ thì $x_1 = a \in (0;1), x_2 = b \in (0;1)$

Do đó bất đẳng thức (1) đúng với $n=1, n=2$.

Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với số tự nhiên $n=k, n=k+1, k \ge 1$.

Tức là ta được: $0 < x_k < 1, 0 < x_{k+1} < 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức (1) đúng với $n=k+2$. Tức là ta phải chứng minh $0 < x_{k+2} < 1$

Thật vậy ta có $x_{k+2} = \frac{1}{k}x_{k+1}{}^2 + \frac{k-1}{k}\sqrt{x_k} > 0\left(x_k > 0, x_{k+1} > 0\right)$

Và ta cũng có

$x_{k+2} - 1 = \frac{1}{k}\left(x_{k+1}^2 - 1\right) + \frac{k-1}{k}\left(\sqrt{x_k} - 1\right) < 0\left(x_k < 1, x_{k+1} < 1\right) \Rightarrow x_{k+2} < 1$

Do đó $0 < x_{k+2} < 1$

Theo nguyên lý quy nạp thì ta có: $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Ta dự đoán được $\lim x_n = 1$

Ta có:

Ta có:

$$x_{n+2} = \frac{1}{n}x_{n+1}^2 + \frac{n-1}{n}\sqrt{x_n} \Rightarrow x_{n+2} = \frac{1}{n}x_{n+1}{}^2 + \sqrt{x_n} - \frac{1}{n}\sqrt{x_n}$$

$$< \frac{1}{n}x_{n+1}^2 - \frac{1}{n}\sqrt{x_n} + 1 \Rightarrow x_{n+2} - 1 < \frac{1}{n}x_{n+1}^2 - \frac{1}{n}\sqrt{x_n}$$

$$\Rightarrow x_{n+2} - 1 < \frac{1}{n}\left(x_{n+1}^2 - 1\right) - \frac{1}{n}\left(\sqrt{x_n} - 1\right) < \frac{1}{n}\left(x_{n+1} - 1\right)\left(x_{n+1} + 1\right) + \frac{1}{n}$$

$$< \frac{2}{n}\left(x_{n+1} - 1\right) + \frac{1}{n}$$

Khi đó ta được

$$x_{n+2} - 1 < \frac{2}{3}\left(x_{n+1} - 1\right) + \frac{1}{n} \Rightarrow \left|x_{n+2} - 1\right| < \left|\frac{2}{3}\left(x_{n+1} - 1\right) + \frac{1}{n}\right| < \frac{2}{3}\left|x_{n+1} - 1\right| + \frac{1}{n}, \forall n \ge 3$$

Áp dụng bổ đề: Cho dãy số $\left(a_n\right)$ thỏa $a_n \ge 0$, số $q \in (0;1)$ và dãy số $\left(b_n\right)$ có $b_n \ge 0, \lim b_n = 0$.

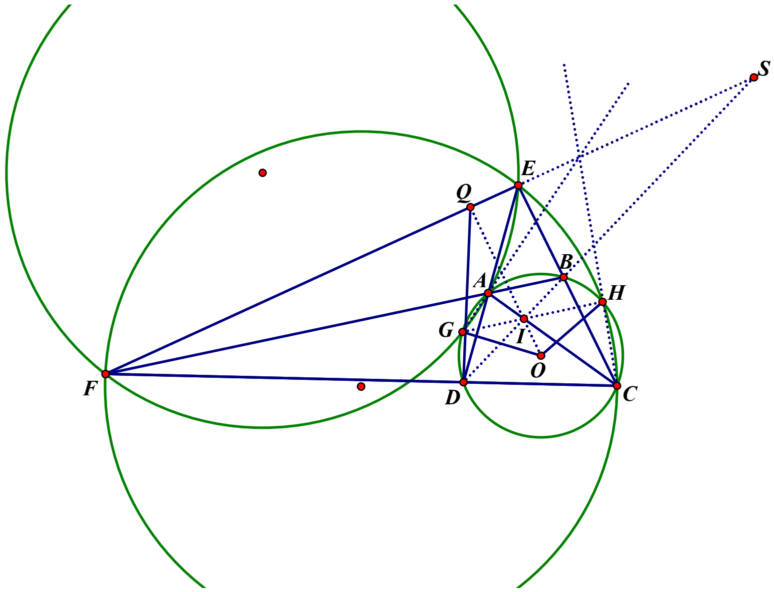
Nếu $a_{n+1} \le q \cdot a_n + b_n$ thì $\lim a_n = 0$

Ta lại có: $\left|x_{n+2} - 1\right| < \frac{2}{3}\left|x_{n+1} - 1\right| + \frac{1}{n}, \forall n \ge 3$ và $\lim \frac{1}{n} = 0$ Nên $\lim\left|x_{n+2} - 1\right| = 0 \Rightarrow \lim x_{n+2} = 1$ hay

$\lim x_n = 1$. Vậy $\lim x_n = 1$

Câu 3:

a)



Rõ ràng EF, AG, CH đồng quy tại tâm đẳng phương của các đường tròn $(AEF), (CEF)$ và (O). Sử dụng *định lí Desargues* cho $\triangle ABG$ và $\triangle CDH$, thay vì chứng minh AC, BD, GH đồng quy ta đi chứng minh

$$\overline{(AB \cap CD), (BG \cap DH), (AG \cap CH)}.$$

Dễ thấy $AB \cap CD$ và $AG \cap CH$ đều thuộc đường thẳng EF, cho nên ta cần chứng minh $BG \cap DH$ cũng thuộc EF.

Áp dụng *định lí Pascal* cho bộ 6 điểm (D, A, G, B, C, H) ta được $BG \cap DH$ nằm trên đường nối hai giao điểm $AD \cap BC$ và $AG \cap CH$. Đường nối này chính là EF, suy ra $BG \cap DH$ nằm trên EF.

b)

Dễ thấy $\triangle AIB \sim \triangle DIC$ nên

$$\frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}.$$

Khi đó: $IA.IC = IB.ID \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{IA}{ID}.\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{AB}{DC}.\dfrac{IC}{ID}$.

Cũng dễ thấy $\triangle QAB \sim \triangle QDC$ nên

$$\frac{QA}{QD} = \frac{QB}{QC} = \frac{AB}{DC}.$$

Khi đó

$$QA.QC = QB.QD \Rightarrow \frac{QB}{QD} = \frac{QA}{QD}.\frac{QC}{QD} = \frac{AB}{CD}.\frac{QC}{QD}$$

Do $\triangle AID \sim \triangle BIC$ nên

$$\frac{IC}{ID} = \frac{BC}{AD}.$$

Do $\triangle QAD \sim \triangle QBC$ nên

$$\frac{QC}{QD} = \frac{BC}{AD}.$$

Do đó

$$\frac{IC}{ID} = \frac{QC}{QD}.$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{IB}{ID} = \frac{QB}{QD}$$

hay QI là phân giác $\widehat{BQD}$.

Gọi $S = BD \cap EF$. Rõ ràng $Q(DB, IS) = -1$ mà QI là phân giác $\widehat{BQD}$ nên theo *định lí về chùm điều hòa* ta có $QI \perp QS$ hay $QI \perp EF$.

Hơn nữa, theo *định lí Brocard* ta suy ra O là trực tâm $\triangle EFI$. Suy ra $OI \perp EF$. Do đó O, I, Q thẳng hàng. Nói cách khác, ba đường thẳng OQ, AC, BD đồng quy.

Nhận thấy rằng

$$\widehat{BQD} = 2\widehat{IQD} = 2(90^0 - \widehat{FQD}) = 180^0 - 2\widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{BOD}$$

cho nên tứ giác $BODQ$ nội tiếp. Suy ra $IB.ID = IO.IQ$.

Theo câu a) thì G, H, I thẳng hàng, cho nên $IG.IH = IB.ID$. Suy ra $IO.IQ = IG.IH$

Vậy bốn điểm G, O, H, Q đồng viên.

Câu 4:

Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(xf(x) + 2y) = f(x)^2 + x + 2f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Từ $P(0,0)$ ta suy ra $f(0) = f(0)^2 + 2f(0) \Rightarrow f(0) \in \{-1; 0\}$.

+) Trường hợp 1. $f(0) = 0$.

Ta xét các phép thế

$P(0, x): f(2x) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R};$

$P(x, 0): f(xf(x)) = f(x)^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Từ $P(2x, 2yf(y))$ ta suy ra

$$f(4xf(x) + 4yf(y)) = 4f(x)^2 + 2x + 2f(2yf(y)) = 4f(x)^2 + 2x + 4f(yf(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(xf(x) + yf(y)) = f(x)^2 + \frac{x}{2} + f(yf(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay đổi vai trò $x; y$ trong đẳng thức trên và đối chiếu với chính nó thì được

$$f(x)^2 + \frac{x}{2} + f(yf(y)) = f(y)^2 + \frac{y}{2} + f(xf(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$f(x)^2 + \frac{x}{2} + f(y)^2 + y = f(y)^2 + \frac{y}{2} + f(x)^2 + x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

điều này không thể xảy ra. Do đó không tồn tại hàm số thỏa mãn trong trường hợp này.

+) Trường hợp 2: $f(0)=-1$

Ta đặt $g(x)=f(x)+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $g(0)=0$ và $P(x,y)$ viết lại thành

$$g(xg(x)-x+2y)=g(x)^2-2g(x)+x+2g(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(0,y)$ ta suy ra $g(2y)=2g(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}$.

Từ $P\left(x,\dfrac{x}{2}\right)$ ta thu được

$$g(xg(x))=g(x)^2+x-g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(2x,x)$ suy ra

$$g(4xg(x))=4g(x)^2-2g(x)+2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(xg(x))=g(x)^2-\frac{g(x)}{2}+\frac{x}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đối chiếu các kết quả thu được, suy ra

$$g(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x)=x-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Câu 5:

Cho $A=a^2+b^2+abc$ và $p=c+2$, ta có $p\ge 3$.

Giả sử tồn tại số nguyên tố q sao cho $q^2 \mid p$. Khi đó, $q^{2008} \mid A$, và vì q^{2008} có $2009>2008$ ước, không thỏa mãn. Vậy không tồn tại q để $q^2 \mid p$.

Giả sử tồn tai hai ước số nguyên tố phân biệt r và s của p. Khi đó, $r^{1004}s^{1004} \mid A$; và như vậy A có ít nhất $1005^2>2008$ ước nguyên dương (mâu thuẫn).

Từ hai điều trên ta suy ra $p=c+2$ là số nguyên tố

Thay $c=p-2$ ta được :

$$A=a^2+b^2+abc=a^2+b^2+ab(p-2)=a^2-2ab+b^2+abp=(a-b)^2+abp.$$

Vì $p \mid A$ và $p \mid abp$, ta suy ra $p \mid (a-b)^2$ hay $p \mid a-b$ do p là số nguyên tố. Do đó $p^2 \mid (a-b)^2$.

Lại có $p^2 \mid A$; $p^2 \mid (a-b)^2$ suy ra $p^2 \mid abp$, dẫn đến $p \mid ab$.

Kết hợp $p \mid a-b, p \mid ab$ và p nguyên tố ta có ngay a và b không nguyên tố cùng nhau. (đpcm)