SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

Ngày thi: 19/9/2018

ĐỀ THI THÁNG LẦN 1 LỚP 10 TOÁN

NĂM HỌC 2018 - 2019

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1 (2,0 điểm) Cho a,b là độ dài hai cạnh góc vuông và c là độ dài cạnh huyền của cùng một tam giác vuông. Chứng minh rằng

$$(1+\frac{c}{a})(1+\frac{c}{b}) \geq 3+2\sqrt{2}$$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho hai đa thức bậc hai P(x) và Q(x) với hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt p_1, p_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt q_1, q_2 và $Q(p_1)+Q(p_2)=P(q_1)+P(q_2)$. Chứng minh rằng biệt thức Delta (Δ) của $P(x)$ và $Q(x)$ bằng nhau

Câu 3 (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố p,q,r sao cho $7p^3-q^3=r^6$

Câu 4. **(3,0 điểm)**

a) Cho tam giác ABC, điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng điểm M nằm trong tam giác khi và chỉ khi $x>0, y>0$ và $x+y<1$

b) Cho hình thang ABCD, (AD song song BC), M là trung điểm CD và P,Q là trung điểm BM, AM. Gọi CP cắt DQ tại N. Chứng minh rằng điểm N nằm bên trong tam giác AMB khi và chỉ khi $\frac{1}{3}<\frac{BC}{AD}<3$

Câu 5 (1,5 điểm). Cho n điểm trên một đường tròn được đánh số từ 1 đến n ($n \geq 5$). Ta tô màu k điểm (3k+1 < n) trong số đó sao cho giữa hai điểm được tô màu liên tiếp, có ít nhất 3 điểm không được tô màu. Có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 1 LỚP 10 TOÁN

Năm học 2018-2019

Câu 1 (2,0 điểm) *Cho a,b là độ dài hai cạnh góc vuông và c là độ dài cạnh huyền của cùng một tam giác vuông. Chứng minh rằng*

$$(1+\frac{c}{a})(1+\frac{c}{b})\geq 3+2\sqrt{2}$$

Lời giải:

Ta có $(1+\frac{c}{a})(1+\frac{c}{b})=\frac{(a+c)(b+c)}{ab}=\frac{c^2+ab+c(a+b)}{ab}$

$=\frac{c^2}{ab}+1+\frac{c(a+b)}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}+1+\frac{\sqrt{a^2+b^2}(a+b)}{ab}$

Mà $a^2+b^2\geq 2ab$ và $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ nên ta có điều phải chứng minh

Câu 2. (1,5 điểm) *Cho hai đa thức bậc hai P(x) và Q(x) với hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt p_1,p_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt q_1,q_2. Biết rằng $Q(p_1)+Q(p_2)=P(q_1)+P(q_2)$. Chứng minh rằng biệt thức Delta (Δ) của $P(x)$ và $Q(x)$ bằng nhau*

Lời giải:

Ta có $P(x)=(x-p_1)(x-p_2)$ và $Q(x)=(x-q_1)(x-q_2)$

$Q(p_1)+Q(p_2)=P(q_1)+P(q_2)\leftrightarrow(p_1-q_1)(p_1-q_2)+(p_2-q_1)(p_2-q_2)=(q_1-p_1)(q_1-p_2)+(q_2-p_1)(q_2-p_2)$
$\leftrightarrow p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=q_1^2+q_2^2-2q_1q_2$

Hay $(p_1-p_2)^2=(q_1-q_2)^2$.

Ta có điều phải chứng minh

Câu 3 (2,0 điểm) *Tìm tất cả các số nguyên tố p,q,r sao cho $7p^3-q^3=r^6$*

Lời giải:

Trước hết, 1 trong ba số p,q,r là số chẵn. Mà $r^6\geq 2^6=64$ nên $7p^3\geq 64$, suy ra $p>2$.

Vậy $r=2$ hoặc $q=2$

+) Nếu $q=2$ thì $7p^3-8=r^6\leftrightarrow 7p^3=r^6+8$.

- Nếu $r=3$ thì $7p^3=3^6+8=737$. Không tồn tại p thỏa mãn
- Nếu $r\neq 3$ thì r^6+8 chia hết cho 3, suy ra p=3, ta được $r^6=181$. Loại

+) Nếu $r=2$ thì $7p^3=q^3+4^3=(q+4)(q^2-4q+16)$. Do $8p^3>7p^3>q^3$ nên $2p>q$ suy ra $q+4<2p+4$. Mà $q+4$ là ước của $7p^3$ nên $q+4\in\{7,p,p^2\}$

- Nếu $q+4=7$ thì $q=3$ nên $7p^3=91$ hay $p^3=13$. Loại
- Nếu $q+4=p$ thì $7p^3=p[(p-4)^2-4(p-4)+16]\leftrightarrow 7p^2=p^2-12p+48$
  Ta được $p^2+2p-8=0\leftrightarrow p=2$ (loại) hoặc $p=-4$ (loại)
- Nếu $q+4=p^2$ thì $q=p^2-4<2p$ nên $p^2-2p+1<5$ hay $(p-1)^2<5$. Vì $p>2$ nên $p=3$. Suy ra $q=5$.

Thử lại với $p=3,q=5,r=2$ thấy thỏa mãn.

Đáp số: $(p,q,r)=(3,5,2)$

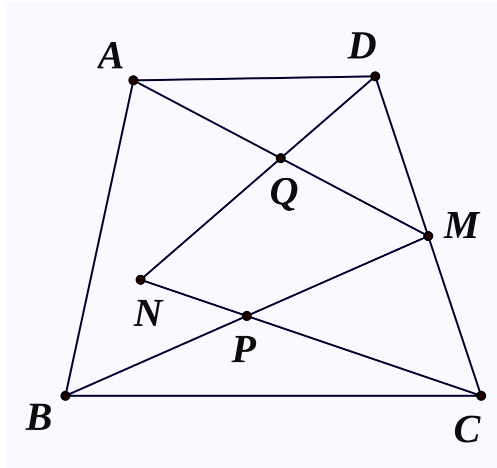
***Câu 4**. (3,0 điểm)* *a) Cho tam giác ABC, điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng điểm M nằm trong tam giác khi và chỉ khi $x>0,y>0$ và $x+y<1$*

b) Cho hình thang ABCD, (AD song song BC), M là trung điểm CD và P,Q là trung điểm BM, AM. Gọi CP cắt DQ tại N. Chứng minh rằng điểm N nằm bên trong tam giác AMB khi và chỉ khi $\frac{1}{3}<\frac{BC}{AD}<3$

Lời giải:

a) Không mất tổng quát, giả sử đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại điểm K. Ta có $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{AK}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ với $m+n=1$ nên $\overrightarrow{AM}=km\overrightarrow{AB}+kn\overrightarrow{AC}$
   +) Nếu M nằm trong tam giác thì $0<k<1$ và K thuộc đoạn BC nên $m,n>0$. Suy ra $x=km>0,y=kn>0$ và $x+y=km+kn=k<1$.
   +) Nếu $x,y>0$ thì $x+y=k(m+n)=k\in(0,1)$ nên $m,n>0$, từ đó K thuộc đoạn BC và M thuộc đoạn AK nên M nằm trong tam giác ABC.

b)



Giả sử $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}, k > 0$.

+) Nếu k=1, nghĩa là ABCD là hình bình hành. Dễ có N là trung điểm AB

+) Nếu k khác 1. Kí hiệu $\overrightarrow{MX} = X$ thì ta có:

$D - A = k(C - B)$, $C + D = 0$, $Q = \frac{1}{2}A$, $P = \frac{1}{2}B$

Giả sử $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{CP} \leftrightarrow N - C = x(P - C)$

Ta có: $-C - A = k(C - B)$ nên $C(k+1) = kB - A$ nên $C = \frac{kB - A}{k+1}$

Vậy $N = \frac{1}{2}xB - (x-1)C = \frac{1}{2}xB - (x-1)\frac{k}{k+1}B + (x-1)\frac{1}{k+1}A$ (*)

Suy ra: $\overrightarrow{DN} = N - D = N + C = (\frac{1}{2}x - (x-1)\frac{k}{k+1}B + \frac{k}{k+1})B + (x-1-1)\frac{1}{k+1}A$

$= (\frac{1}{2}x - (x-2)\frac{k}{k+1})B + (x-2)\frac{1}{k+1}A$

Mà $\overrightarrow{DQ} = Q - D = \frac{1}{2}A + C = (\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1})A + \frac{k}{k+1}B$

Do $\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{DQ}$ cùng phương nên $\dfrac{\frac{x-2}{k+1}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}x - (x-2)\frac{k}{k+1}}{\frac{k}{k+1}} \leftrightarrow \frac{(k+1)x - 2k(x-2)}{2k} = \frac{2(x-2)}{k-1}$

$\leftrightarrow (kx + x - 2kx + 4k)(k-1) = 4kx - 8k \leftrightarrow (-kx + x + 4k)(k-1) = 4kx - 8k$

$\leftrightarrow [(k-1)x - 4k](k-1) = 8k - 4kx \leftrightarrow (k-1)^2 x - 4k(k-1) = 8k - 4kx$

$\leftrightarrow [(k-1)^2 + 4k]x = 8k + 4k(k-1) \leftrightarrow (k+1)^2 x = 4k(k+1)$

Ta được $x=\frac{4k}{k+1}$ nên $x-1=\frac{3k-1}{k+1}$ và $\frac{1}{2}x-(x-1)\frac{k}{k+1}=\frac{k(3-k)}{(k+1)^2}$

Thay vào (*) được:

$$N=\frac{1}{2}xB-(x-1)C=\frac{1}{2}xB-(x-1)\frac{k}{k+1}B+(x-1)\frac{1}{k+1}A\ (*)$$

$$N=\frac{k(3-k)}{(k+1)^2}B+\frac{3k-1}{(k+1)^2}A$$

Rõ ràng N nằm trong tam giác AMB khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{k(3-k)}{(k+1)^2}>0\\ \frac{3k-1}{(k+1)^2}>0\\ \frac{k(3-k)}{(k+1)^2}+\frac{3k-1}{(k+1)^2}<1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}k<3\\ k>\frac{1}{3}\\ (k-1)^2>0\end{cases}$

Hay $\frac{1}{3}<k<3$. Điều phải chứng minh.

Câu 5 (1,5 điểm). *Cho n điểm trên một đường tròn được đánh số từ 1 đến n ($n\geq 5$). Ta tô màu k điểm (3k+1 < n) trong số đó sao cho giữa hai điểm được tô màu liên tiếp, có ít nhất 3 điểm không được tô màu. Có bao nhiêu cách tô màu như vậy?*

Lời giải:

Ta đếm số cách tô màu nhờ việc chia làm 2 trường hợp

Trường hợp 1. Một trong các số 1, 2, hoặc 3 được tô màu. Khi đó chỉ có đúng 1 trong 3 số được tô màu. Chọn số được tô, có 3 cách. Chọn các điểm được tô màu tiếp theo cũng là cách chọn bộ số $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ mà $x_1+x_2+\cdots+x_k=n-k, x_i\geq 3$, có C_{n-3k-1}^{k-1} cách.

Vậy trường hợp này có $3C_{n-3k-1}^{k-1}$ cách tô màu.

Trường hợp 2. Không có số nào trong số các số 1,2,3 được tô màu. Khi đó giả sử các điểm $i_1,i_2,\ldots,i_k$ được tô với $i_1<i_2<\ldots<i_k$ $(4\leq i_1,i_k\leq n)$ thì $i_{s+1}-i_s>3$, nghĩa là mỗi cách tô ứng với 1 và chỉ 1 bộ số $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ mà $4\leq i_1<i_2-3<i_3-6<\ldots i_k-3(k-1)\leq n-3(k-1)$, tức là một cách chọn ra k số từ $n-3(k-1)-4+1=n-3k$ số, khi đó, có C_{n-3k}^{k} cách.

Mặt khác, với hai cách chọn bộ số $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ khác nhau, không thể cho cùng một cách tô

Vậy đáp số là $C_{n-3k}^{k}+3C_{n-3k-1}^{k-1}$ cách tô màu