

ĐỀ CHÍNH THỨC

*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)*

Ngày thi: 26 tháng 11 năm 2018

Câu 1 (2 điểm) Giải bất phương trình: $x^2 - 6x + 2 \geq 2(2 - x)\sqrt{2x - 1}$

Câu 2 (2 điểm) Cho a, b, c, d là các số nguyên sao cho $a - b + c - d$ là số nguyên lẻ và chia hết $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì $a - b + c - d$ chia hết $a^n - b^n + c^n - d^n$

Câu 3 (2 điểm) Trong mặt phẳng cho tam giác ABC không cân ($AB < BC < CA$) ngoại tiếp đường tròn tâm I . Lấy E và F lần lượt trên các đường thẳng AC và AB sao cho $CB = CE = BF$, đồng thời chúng nằm về cùng một phía với A đối với đường thẳng BC . Các đường thẳng BE và CF cắt tại G .

1. Chứng minh rằng bốn điểm C, E, I và G cùng nằm trên một đường tròn.
2. Trên đường thẳng qua G và song song với AC lấy điểm H sao cho $HG = AF$ đồng thời H khác phía với C đối với đường thẳng BG .

Chứng minh rằng $\angle EHG = \frac{1}{2} \angle CAB$

Câu 4 (2 điểm) Tìm hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ thỏa mãn:

$$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) - 168 \text{ với mọi } n \text{ nguyên dương}$$

Câu 5 (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Hết

ĐÁP ÁN

Câu 1. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ ($t \geq 0$) thì $2x = t^2 + 1$

Khi đó ta có: $x^2 - 6x + 2 - 2(2-x)t \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2tx - 4t - 3(t^2 + 1) + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x+t)^2 - (2t+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3t+1)(x-t-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq t \quad (\text{do } x+3t+1 > 0; \forall x \geq \frac{1}{2}; \forall t \geq 0)$$

$$\text{Với } x-1 \geq t \text{ ta có } x-1 \geq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 + \sqrt{2}$$

Câu 2. Nhận xét: “Với a, b, x, y, z, t là các số nguyên sao cho $a-b$ là ước của $x-y$ và $z-t$ thì $a-b \mid xz - yt$ ”

Mặt khác do:

$$(a+c)^2 - (b+d)^2 = (a-b+c-d)(a+b+c+d); (a-b+c-d) \text{ nên suy ra}$$

$$a-b+c-d \mid a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac - bd)$$

Từ đó, do giả thiết nên thu được $a-b+c-d \mid ac - bd$ (1)

Ta chứng minh kết luận của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $n = 1, 2$: thì kết luận hiển nhiên đúng.

Giả thiết khẳng định đúng tới n , tức là $a-b+c-d \mid a^n - b^n + c^n - d^n$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Ta cần chứng minh $a-b+c-d \mid a^{n+1} - b^{n+1} + c^{n+1} - d^{n+1}$ (2)

Thật vậy, do $a-b+c-d \mid (a+c) - (b+d)$ và nhận xét ở trên suy ra $a-b+c-d$ là ước của

$$(a+c)(a^n + c^n) - (b+d)(b^n + d^n) = a^{n+1} - b^{n+1} + c^{n+1} - d^{n+1} + ac(a^{n-1} + c^{n-1}) - bd(b^{n-1} + d^{n-1})$$

Nhưng, do (1), giả thiết quy nạp và nhận xét ở trên suy ra $a-b+c-d \mid a^n - b^n + c^n - d^n$ với mọi số nguyên

Câu 3.

1. Do $AB < BC < CA$ nên E nằm trên đoạn CA , F nằm trên tia đối của tia AB

Từ giả thiết, suy ra F đối xứng với C qua phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\text{Do đó } \angle CFA = \angle CFB = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} \text{ và } \angle AIC = 180^\circ - \frac{\angle CAB + \angle BCA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}$$

Suy ra tứ giác $AFCI$ nội tiếp.

$$\text{Từ đó } \angle AFI = \angle ACI = \frac{\angle BCA}{2} \text{ và } \frac{\angle CAB}{2} = \angle IAC = \angle IFC = \angle ICF$$

Do I là tâm đường tròn nội tiếp và $CB = CE = BF$ nên $CI \perp BE, BI \perp CF$

$$\text{Vậy } \angle IBE = \angle ICF \text{ (cùng phụ góc } \angle CGB). \text{ Do đó ta có } \angle IEB = \frac{\angle CAB}{2}$$

Hơn nữa, do tính đối xứng nên $\angle IEB = \angle IBE = 90^\circ - \angle MGC = \angle ICG$ suy ra tứ giác $CIEG$ nội tiếp.

2. Do tứ giác CIEG nội tiếp, nên $EGI = ECI = \frac{BCA}{2} = AFI$

Hơn nữa, do $IAB = IEB$ nên $GEI = FAI$ suy ra $\triangle GEI \sim \triangle FAI$

$$\text{Suy ra } \frac{EG}{BI} = \frac{EG}{EI} = \frac{AF}{AI} \Rightarrow \frac{HG}{GE} = \frac{AF}{GE} = \frac{AI}{BI}$$

Nhưng $HGE = AEB = 90^\circ + \frac{BCA}{2} = AIB$ suy ra $\triangle HGE \sim \triangle AIB$

$$\text{Từ đó } \angle HGE = \angle BAI = \frac{1}{2} \angle CAB$$

Câu 4 Ta có $f(x) + f(x+1) = f(x+2).f(x+3) - 168$

$$f(x+1) + f(x+2) = f(x+3).f(x+4) - 168$$

Do đó $\forall k \in \mathbb{N}^*$ thì $f(k+2) - f(k) = f(k+3).[f(k+4) - f(k+2)]$

Suy ra rằng:

$$f(3) - f(1) = f(4).f(6) \dots f(2k). [f(2k+1) - f(2k-1)] \quad (1)$$

$$f(4) - f(2) = f(5).f(7) \dots f(2k+1). [f(2k+2) - f(2k)] \quad (2)$$

Do đó: $|f(3) - f(1)| = f(4).f(6) \dots f(2k).|f(2k+1) - f(2k-1)|$ với $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$

Nếu $f(3) \neq f(1)$ thì $f(2k+1) \neq f(2k-1)$

Vì $|f(2k+1) - f(2k-1)|$ là số nguyên dương nên

$$|f(2k+1) - f(2k-1)| \geq 1 \text{ và } f(k) \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Do đó $|f(3) - f(1)| \geq 2^{k-1}$, với $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$

Điều này không thể xảy ra. Vậy $f(3) = f(1)$ suy ra $f(2k+1) = f(2k-1) = a$

Tương tự $f(2k+2) = f(2k) = b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*, a, b \geq 2$

Giả thuyết: $a + b = ab - 168 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 = 169 = 13^2 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 13^2$

$$\Leftrightarrow a-1 = b-1 = 13 \text{ hoặc } \begin{cases} a-1=169 \\ b-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-1=1 \\ b-1=169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=14 \\ b=2 \\ b=170 \end{cases}$$

Thử lại thỏa mãn.

Câu 5 Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a+b+c) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng do $0 < a, b, c < 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

