SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN IV
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN- KHỐI: 10

Thời gian :180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)
Ngày thi: 21 tháng 1 năm 2019

Câu 1(2,0 điểm) a) Giải phương trình $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

b) Giải bất phương trình $x^2 + 4x + 5 < 3(x+1)\sqrt{x+2}$

Câu 2(2,0 điểm) a) Cho dãy số $b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n, \forall n \geq 1$. Chứng minh

$$b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2 + (-1)^n, \forall n$$

b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một dãy số nguyên dương thỏa mãn

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 12, a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + (-1)^n, \forall n \geq 2$$

Câu 3 (2,0 điểm) Tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm. Hai đường tròn đi qua A và F tiếp xúc với đường thẳng BC tại các điểm P và Q sao cho B nằm giữa C và Q.

a) Chứng minh BD.DC=DP.DQ

b) Chứng minh $\angle BQF = \angle BPH - \angle BAD$

Câu 4 (2,0 điểm)

a) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 trong đó các chữ số 1 và 6 đều có mặt đúng hai lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ?

b) Các số 1, 2, 3,..., n được viết liên tiếp trên một đường tròn theo thứ tự đó ($n \in N, n \geq 4$). Hai số không kề nhau được gọi là một cặp liên thông nếu một trong hai cung tạo bởi chúng chứa toàn số bé hơn chúng. Tìm số cặp liên thông theo n.

Câu 5 (2,0 điểm) Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y đều không chia hết cho 5 và thỏa mãn $x^2 + 19y^2 = 198 \times 10^{1989}$.

--------------------------Hết--------------------------

-Thí sinh không được sử dụng tài liệu;

- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI NĂNG KHIẾU MÔN TOÁN KHỐI 10
NĂM HỌC 2018-2019
(Hướng dẫn chấm gồm có 3 trang)

Câu 2: 1)(1 điểm) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{3}$. Pt$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-1)+(\sqrt{5x+4}-2)=3x^2-x$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2}=x(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}+\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+2}=3x-1(*) \end{array}\right.$$

Với x=1 thì thỏa mãn (*)
Nếu x<1 thì VT(*)>2>VP(*): loại. Vậy pt có 2 Nếu x>1 thì VT(*)<2<VP(*): loại
nghiệm x=0, x=1.

2)(1 điểm) Điều kiện: $x \ge -2$. Bpt$\Leftrightarrow (x+1)^2+2(x+2)<3(x+1)\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \left[(x+1)-\sqrt{x+2}\right].\left[(x+1)-2\sqrt{x+2}\right]<0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}<x+1<2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+x-1>0 \\ x^2-2x-7<0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x<1+\sqrt{8}$ (thỏa mãn điều kiện)

Câu 2

1)(1 điểm) Chứng minh bằng quy nạp**.**

2) (1 điểm) Ta có $a_4a_2=a_3^2\pm 1 \Rightarrow 24=a_3^2\pm 1 \Rightarrow a_3=5(do a_3 \in Z^+)$

Tiếp theo ta chứng minh dãy số (a_n) tăng. Giả sử đã có $a_1<a_2<..\,.<a_k$. Khi đó

$a_{k+1}a_{k-1}=a_k^2\pm 1>a_k^2-a_k=a_k(a_k-1)\ge a_ka_{k-1}\Rightarrow a_{k+1}>a_k$, theo nguyên lý quy nạp ta thấy dãy số này tăng.

Với mọi $n\ge 4$ thì $a_{n-1}\ge a_3=5$ nên trong hai số a_n^2+1, a_n^2-1 chỉ có tối đa một số chia hết cho $a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}$ được xác định duy nhất (nếu tồn tại), do đó chỉ có tối đa một dãy số thỏa mãn bài toán. Bây giờ ta sẽ chỉ ra một dãy số như thế:

$b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n, \forall n \geq 1$

Ta có $b_3 = 5, b_4 = 12, b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2 + (-1)^n, \forall n$

Câu 3

1)(1 điểm) Ta có $BP^2 = BA.BF = BQ^2 \Rightarrow BP = BQ$. Khi đó

$$BD.DC = BD.(BC - BD) = BD.BC - BD^2 = BF.BA - BD^2 = BP^2 - BD^2 = (BP - BD).(BP + BD)$$
$$= DP.(BQ + BD) = DP.DQ$$

2)(1 điểm) Các tam giác BDH và ADC đồng dạng nên AD.DH=BD.DC, cùng với phần a ta được AD.DH=DP.DQ, do đó các tam giác HDP và QDA đồng dạng. Vì vậy

$$HPD = QAD \Rightarrow BPH = BAD + BAQ \Rightarrow BQF = BAQ = BPH - BAD$$

Câu 4 : 1)(1 điểm) Chọn 2 trong 8 vị trí để điền 2 chữ số 1: có $C_8^2 = 28$ cách

Chọn 2 trong 6 vị trí còn lại để điền 2 chữ số 6: có $C_6^2 = 15$ cách

Xếp 4 chữ số còn lại : có 4!=24 cách

Vậy ta có 28.15.24=10080 số

2)(1 điểm) Gọi số cặp liên thông ứng với n số là S_n, dễ thấy $S_4 = 1$. Nếu ta bỏ đi số 1 thì chỉ còn lại n-1 số từ 2 đến n, lúc này số cặp liên thông là S_{n-1} . Bây giờ ta cho số 1 vào thì các cặp liên thông cũ vẫn liên thông, hơn nữa ta sẽ có thêm một cặp liên thông đó là hai số ở hai bên số 1. Vậy ta có $S_n = S_{n-1} + 1$ nên $S_n = n - 3$

Câu 5

Ta thấy $100 = 9^2 + 19 \times 1^2$; $1980 = 21^2 + 19 \times 9^2$

và $(x^2 + 19y^2)(a^2 + 19b^2) = (xa + 19yb)^2 + 19(xb - ya)^2$

Ta gọi số nguyên dương n là "số đẹp" nếu tồn tại $x, y \in \mathbf{Z}$ sao cho $x-y$ không chia hết cho 5 và $n = x^2 + 19y^2$.

Ta sẽ chứng minh với mọi số nguyên dương m thì 100^m là "số đẹp".

- Khi $m=1$, khẳng định là đúng.

- Giả sử khẳng định đã đúng với $m=k$, tức là $100^k = a^2 + 19b^2$, trong đó $a, b \in \mathbf{Z}$ và $a-b$ không chia hết cho 5.

Ta có $100^{k+1} = 100 \times 100^k = (9^2 + 19 \times 1^2)(a^2 + 19b^2) = (9a - 19b)^2 + 19(9b + a)^2$, hơn nữa $(9a - 19b) - (9b + a) = 8(a - b) - 20b$ không chia hết cho 5 nên khẳng định cũng đúng với $m = k+1$. Phép chứng minh được hoàn tất.

Như vậy $10^{1988} = 100^{994}$ là "số đẹp", tức là $100^{994} = A^2 + 19B^2$, trong đó $A, B \in \mathbf{Z}$ và $A-B$ không chia hết cho 5. Thế thì

$$198 \times 10^{1989} = 1980 \times 100^{994} = (21^2 + 19 \times 9^2)(A^2 + 19B^2) = (21A - 171B)^2 + 19(21B + 9A)^2$$

đặt $x = 21A - 171B, y = 21B + 9A \Rightarrow x - y = 12(A - B) - 180B$ không chia hết cho 5.

Mặt khác $x^2 + 19y^2 = 198 \times 10^{1989} \vdots 5$ nên x, y đều không chia hết cho 5.