SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI THÁNG LẦN 5 NĂM HỌC 2018 - 2019

MÔN TOÁN – 10

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1. **(2,0 điểm)** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$

Câu 2. **(2,0 điểm)** Cho ba số thực dương a,b,c. chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2} \ge ab+bc+ca$$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AB+AC=2BC$

a) Chứng minh $\angle AIO = 90^0$

b) Gọi M, N là điểm chính giữa cung nhỏ AB và AC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M’,N’ là hình chiếu của I trên AB, AC tương ứng. Gọi X và Y lần lượt là hình chiếu của A trên MM’ và NN’. Chứng minh rằng tứ giác AXIY nội tiếp.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho số nguyên dương n>1. Một số nguyên dương x được gọi là “ đáng yêu trong mắt n” nếu đem chia x^2 cho n, ta được số dư là số lẻ.

a) Với n=11. Có bao nhiêu số nguyên dương đáng yêu trong mắt n mà nhỏ hơn n?

b) Chứng minh nếu x nguyên dương mà x và x+1 đều đáng yêu trong mắt n thì $[\frac{(x+1)^2}{n}]-[\frac{x^2}{n}]=1$

c) Chứng minh rằng có không quá $1+[\sqrt{3n}]$ số nguyên dương liên tiếp mà tất cả đều đáng yêu trong mắt n.

Câu 5. **(1,0 điểm)** Có 2018 người xếp thành một vòng tròn, lúc đầu mỗi người cầm 1 chiếc kẹo. Mỗi bước chọn hai người có kẹo và thực hiện thao tác: Mỗi người chuyển 1 chiếc kẹo qua người bên cạnh (về bên trái hoặc phải). Sau hữu hạn bước có thể xảy ra trường hợp tất cả số kẹo chuyển về một người hay không ?

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 5 LỚP 10 TOÁN NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy + x^2 - xy + y^2) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8y^3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array} \right. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm : (2; 1) và (– 2 ; – 1)

Câu 2. Cho ba số thực dương a,b,c . chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \ge ab + bc + ca$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, có $a^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + b^4 + \frac{b^2}{(a+c)^2} + c^4 + \frac{c^2}{(b+a)^2} \ge 2(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b})$

Mặt khác $2(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b}) = 2(\frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(a+c)} + \frac{c^4}{c(a+b)} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca} \ge ab+bc+ca$

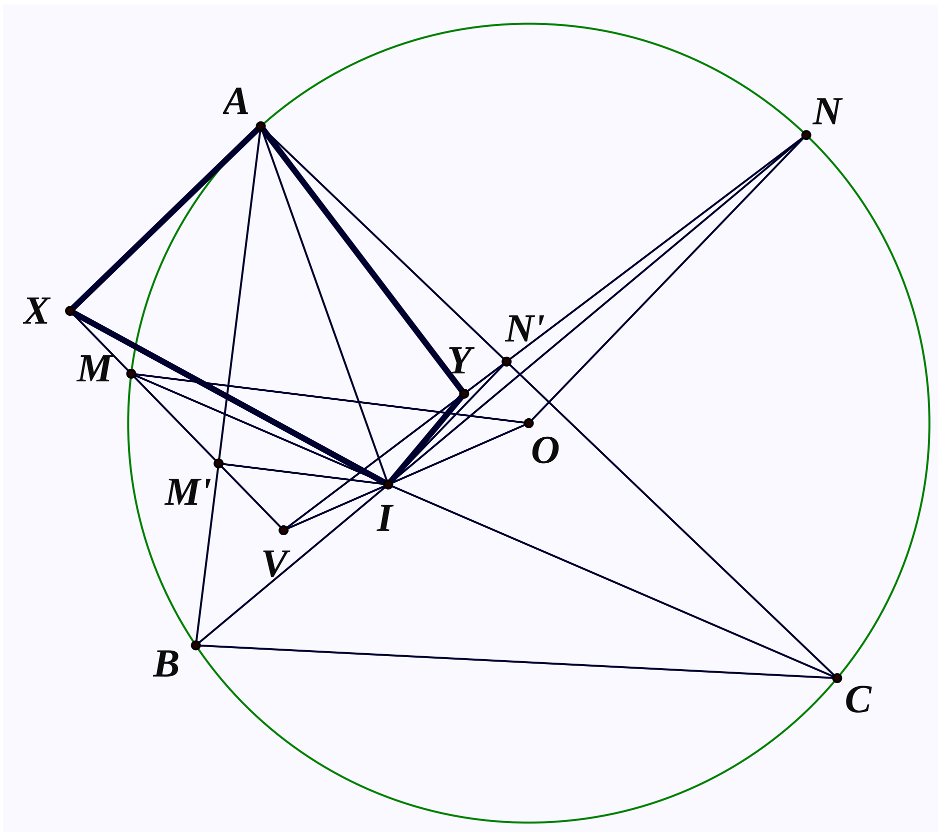
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AB + AC = 2BC$

a) Chứng minh $\angle AIO = 90^0$

b) Gọi M, N là điểm chính giữa cung nhỏ AB và AC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M’,N’ là hình chiếu của I trên AB, AC tương ứng. Gọi X và Y lần lượt là hình chiếu của A trên MM’ và NN’. Chứng minh rằng tứ giác AXIY nội tiếp.

Lời giải:



a) Chứng minh $b+c=2a \leftrightarrow \angle AIO=90^0$

Trước hết có $IO^2=R^2-2Rr$ và $IA^2=r^2+(p-a)^2$ nên $\angle AIO=90^0 \leftrightarrow AO^2=AI^2+IO^2$

$\leftrightarrow R^2=R^2-2Rr+r^2+(p-a)^2$

$\leftrightarrow 2Rr=r^2+(p-a)^2 \leftrightarrow \frac{abc}{2S}.\frac{S}{p}=\frac{S^2}{p^2}+(p-a)^2$

$\leftrightarrow \frac{abc}{2}=(p-a)(p-b)(p-c)+p(p-a)^2$

$\leftrightarrow abc=2(p-a)[(p-b)(p-c)+p(p-a)]$

$\leftrightarrow abc=2(p-a)bc \leftrightarrow a=b+c-a \leftrightarrow b+c=2a$. Ta có điều phải chứng minh

b) Gọi V là tâm vị tự của phép vị tự biến đường tròn (I) thành đường tròn (O), tỉ số vị tự k

Khi đó $V_O^k: M' \mapsto M_1, N' \mapsto N_1, I \mapsto O$ nên $IM' \parallel OM_1, M_1 \in (O), IN' \parallel ON_1, N_1 \in (O)$.

Vậy $M_1 \equiv M, N_1 \equiv N$ hay MM', OI, NN' đồng quy tại V.

Tứ giác AXIY nội tiếp khi và chỉ khi $\angle AIV = 90^0 \leftrightarrow \angle AIO = 90^0$.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho số nguyên dương n>1. Một số nguyên x được gọi là " *đáng yêu trong mắt n*" nếu đem chia x^2 cho n, ta được số dư là số lẻ.

a) Với n=11. Có bao nhiêu số nguyên dương đáng yêu trong mắt n mà nhỏ hơn n?

c) Chứng minh nếu x và x+1 đều đáng yêu trong mắt n thì $[\frac{(x+1)^2}{n}]-[\frac{x^2}{n}]=1$

b) Chứng minh rằng có không quá $1+[\sqrt{3n}]$ số nguyên dương liên tiếp mà tất cả đều đáng yêu trong mắt n.

Lời giải:

a) Thử trực tiếp, có 8 số là 1,3,4,5,6,7,8,10 là các số đáng yêu trong mắt n, nhỏ hơn n

b) Xét cả x và x+1 đều đáng yêu. Do số dư của x^2 và $(x+1)^2$ cho n là $x^2-n[\frac{x^2}{n}]$ và $(x+1)^2-n[\frac{(x+1)^2}{n}]$, cùng lẻ, suy ra $[\frac{x^2}{n}]$ và $[\frac{(x+1)^2}{n}]$ khác tính chẵn lẻ.

Do $0<(x+1)^2-x^2<2n$ nên $[\frac{(x+1)^2}{n}]-[\frac{x^2}{n}]\le 2$. Vậy $[\frac{(x+1)^2}{n}]-[\frac{x^2}{n}]=1$

c) Nếu n chẵn thì mọi số x chẵn, x^2 chia n luôn có số dư chẵn, nên x không đáng yêu trong mắt n. Nên hiển nhiên không thể có hai số nguyên lien tiếp đáng yêu trong mắt n.

Nếu n lẻ. Do tất cả các bội của n đều không đáng yêu trong mắt n, nên ta chỉ cần xem xét các số $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$

Theo câu b), ta thấy nếu $x,x+1,x+2,\dots,x+k$ đáng yêu thì $m=y-[\frac{y^2}{n}]$ là hằng số với mọi $y=x,x+1,x+2,\dots,x+k$

Do $m=y-[\frac{y^2}{n}] \leftrightarrow y-m\le\frac{y^2}{n}<y-m+1$, tức là $n(\frac{n}{4}-m)\le(y-\frac{n}{2})^2<n(\frac{n}{4}-m+1)$, số số nguyên dương lien tiếp như thế không vượt quá $[\sqrt{n(\frac{n}{4}-m+1)}-\sqrt{n(\frac{n}{4}-m)}]+1\le[\sqrt{n}]+1$ nếu $m\le[\frac{n}{4}]$ và không vượt quá $2[\sqrt{n.\frac{n}{4}}+\frac{1}{2}]\le[\sqrt{3n}]+1$ nếu $m=[\frac{n}{4}]+1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $n\equiv 3(\mod 8)$, 3n không chính phương và $[\sqrt{3n}]$ là số lẻ.

Câu 5. Có 2018 người xếp thành một vòng tròn, lúc đầu mỗi người cầm 1 chiếc kẹo. Mỗi bước chọn hai người có kẹo và thực hiện thao tác: Mỗi người chuyển 1 chiếc kẹo qua người bên cạnh (về bên trái hoặc phải). Sau hữu hạn bước có thể xảy ra trường hợp tất cả số kẹo chuyển về một người hay không ?

Lời giải:

Cố định 2018 người trên một đường tròn, đánh số theo thứ tự từ 1 đến 2018.
Chia số người này thành 2 nhóm, nhóm được đánh số lẻ và nhóm được đánh số chẵn. Lúc đầu số kẹo của hai nhóm là bằng nhau (cùng bằng 1009 chiếc). Như vậy, mỗi người chuyển kẹo, sẽ chuyển cho người thuộc nhóm khác.
Nhận xét:

+) Nếu hai người được chọn được đánh số khác tính chẵn lẻ thì số lượng kẹo của mỗi nhóm không đổi, suy ra tính chẵn lẻ về số kẹo của mỗi nhóm không đổi.
+) Nếu hai người được chọn được đánh số cùng tính chẵn lẻ thì tính chẵn lẻ về số kẹo của mỗi nhóm không thay đổi.
(Giả sử hai người được đánh số chẵn thì số kẹo của nhóm chẵn giảm 2, số kẹo của nhóm lẻ tăng 2)
Vậy tại mọi thời điểm tính chẵn lẻ của tổng số kẹo của mỗi nhóm không đổi.
Mà lúc đầu mỗi nhóm có 1009 kẹo nên không thể xảy ra trường hợp số kẹo tập trung về một người.