SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN 2**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI	**NĂM HỌC 2018-2019**
	MÔN: TOÁN- KHỐI: 11
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài:180 phút (không kể thời gian giao đề)*
	(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)
	Ngày thi: 17 tháng 9 năm 2018

Câu 1(2 điểm) Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ $5km$, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc $6km/h$. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

Câu 2(2 điểm) Cho khối chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB = AC = 5a, BC = 6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Hãy tính thể tích V của khối chóp đó.

Câu 3(2 điểm) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

Câu 4(2 điểm) Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số có 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

Câu 5(2 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên khác đa thức không sao cho $10^n - 3n - 2016$ chia hết cho $P(n)$ với mọi số nguyên dương n.

--------------------------Hết--------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN

Câu 1(2 điểm)

Gọi $BM = x\ \left(km\right)$, $0 \le x \le 7$. Khi đó: $AM = \sqrt{25+x^2}$ và $MC = 7 - x$.

Theo đề bài ta có: $f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$.

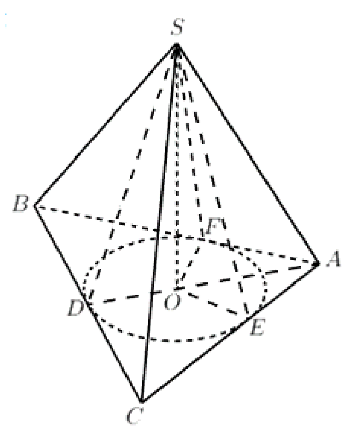
$f'\left(x\right) = \dfrac{3x - 2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$.

Cho $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$.

Khi đó: $f\left(0\right) = \dfrac{29}{12}$, $f\left(7\right) = \dfrac{\sqrt{74}}{4}$ và $f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;7]} f\left(x\right) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Câu 2(2 điểm)



Kẻ $SO \perp \left(ABC\right)$ và OD, OE, OF lần lượt vuông góc với AC, CA, AB. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SD \perp BC, SE \perp AC, SF \perp AB$ (như hình vẽ). Từ đó suy ra $\angle SDO = \angle SEO = \angle SFO = 60^0$. Do đó các tam giác vuông $SDO; SEO; SFO$ bằng nhau. Từ đó suy ra $OD = OE = OF$. Vậy O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vì tam giác ABC cân tại A nên OA vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Suy ra A, O, D thẳng hàng.

Suy ra $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$.

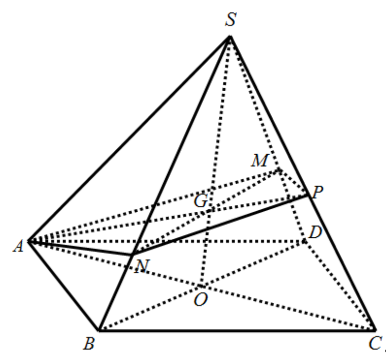
Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar$ với $r = \frac{3}{2}a$.

Do đó $SO = OD.\tan 60^0 = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 3(2 điểm)

Cách 1



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. G là trọng tâm tam giác SAC.

Ta có M, G, N thẳng hàng. Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}\frac{SM}{SD} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}\frac{SM}{SD}.$$

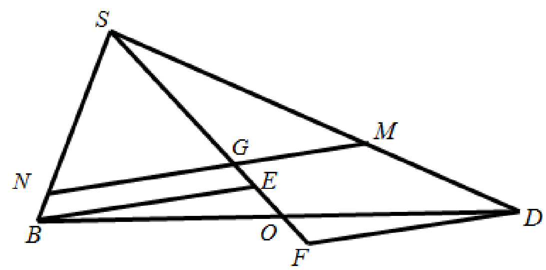
Tương tự $\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}\frac{SN}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}\frac{SN}{SB}$.

Từ đó suy ra $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB}\right) \Rightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD} + \frac{SN}{SB}\right)$.

Hay $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=3$.

Thậy vậy, qua B,D kẻ các đường song song với MN cắt SO lần lượt tại E,F.



Ta có: $\frac{SD}{SM}=\frac{SF}{SG};\frac{SB}{SN}=\frac{SE}{SG}\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{SE+SF}{SG}$.

$\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{2SO}{SG}=2.\frac{3}{2}=3$.

Đặt $\frac{SD}{SM}=x;\frac{SB}{SN}=y$. Ta có $x+y=3$.

Mặt khác $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x+y}{4xy}=\frac{3}{4xy}\geq\frac{3}{(x+y)^2}=\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{V_1}{V}$ nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Cách 2 : Sử dụng vecto

Câu 4 (2 điểm)

Đặt X là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A=\{$ các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho 9$\}$

Với mỗi số thuộc A có m chữ số $(m\leq 2008)$ thì ta có thể bổ sung thêm $2011-m$ số 0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A có dạng $\overline{a_1a_2...a_{2011}};\ a_i\in\{0,1,2,3,...,9\}$

$A_0=\{a\in A|$mà trong a không có chữ số 9$\}$

$A_1=\{a\in A|$ mà trong a có đúng 1 chữ số 9$\}$

- Ta thấy tập A có $1+\dfrac{9^{2011}-1}{9}$ phần tử
- Tính số phần tử của A_0

Với $x\in A_0 \Rightarrow x=\overline{a_1...a_{2011}}; a_i\in\{0,1,2,...,8\}$ $i=\overline{1,2010}$ và $a_{2011}=9-r$ với

$r\in[1;9], r\equiv\sum_{i=1}^{2010}a_i$. Từ đó ta suy ra A_0 có 9^{2010} phần tử

- Tính số phần tử của A_1

Để lập số của thuộc tập A_1 ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

Bước 1: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0,1,2...,8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là 9^{2009}

Bước 2: Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó A_1 có 2010.9^{2009} phần tử.

Vậy số các số cần lập là: $1+\dfrac{9^{2011}-1}{9}-9^{2010}-2010.9^{2009}=\dfrac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}$.

Câu 5(2 điểm)

Trước hết ta chứng minh $P(x)$ đa thức hằng. Thật vậy giả sử $P(x)$ đa thức khác hằng . Suy ra tồn tại số tự nhiên N đủ lớn sao cho với mọi $n\geq N$, ta có $|P(n)|>1$

Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của $P(n)$.

Ta có $P(n+p)-P(n)\,\vdots\, p$. Suy ra $10^n(10^p-1)-3p\,\vdots\, p$ hay $10^n(10^p-1)\,\vdots\, p$

Nếu $p\neq 2;5$ thì ta có $(10^p-1)\,\vdots\, p$, mà theo định lý Fermat's ta có $10^p\equiv 10(\text{mod } p)$

Từ đó suy ra $p=3$

Do đó $p=2;3$ hoặc 5.

Ta thấy rằng $(10^n-3n-3016,3)=1\Rightarrow p=2$ hoặc 5.

Nếu $p=2$ thì ta có $2 \mid 10^n - 3n - 2016$ suy ra n chẵn .

Nếu $p=5$ thì ta có $5 \mid 10^n - 3n - 2016$ suy ra $n \equiv 3 \pmod 5$

Chọn được n.không thỏa mãn cả hai điều kiện trên $\left(n \equiv 1 \pmod{10}\right)$ và $n \geq N$, khi đó ta có điều vô lý.Vậy $P(x)$ đa thức hằng.

Đặt $\left|P(n)\right| = a, a = const$. Ta có $\left(10^n - 3n - 2016\right) \vdots a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n=1$, suy ra a lẻ.

Với $n=5$, suy ra $(a,5)=1$

Nếu $a>1$ thì gọi q là một ước nguyên tố bất kỳ của a. Ta có $(10,q)=1$.

Chọn $n=q$ ta có $\left(10^q - 3q - 2016\right) \vdots q$, mà $10^q \equiv 10 \pmod q \Rightarrow q \mid 2006$

Chọn $n=q-1$ ta có $\left(10^{q-1} - 3(q-1) - 2016\right) \vdots q$, mà $10^{q-1} \equiv 1 \pmod q \Rightarrow q \mid 2012$

Từ hai điều trên suy ra $q \mid (2006, 2012) = 2$ vô lý do a lẻ.

Vậy $a=1$. Suy ra $P(x) \equiv 1, P(x) \equiv -1$, là hai đa thức cần tìm.

-Hết-