SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi	ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ TƯ NĂM HỌC 2018-2019 Môn: Toán lớp 11. Ngày thi 21/01/2019 *Thời gian làm bài: 180 phút* *(Đề gồm có 5 câu, 1 trang)*

Câu 1. (1,5 điểm) Tìm hàm số $f: R \to R$ sao cho

$$f(x^2 - y) = x.f(x) - f(y), \ \ \forall x, y$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho dãy số $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \frac{-2019}{n}\ (x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}), \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy $u_n = \frac{1}{n}(x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^n x_n)$
b) Tìm giới hạn của dãy (u_n)

Câu 3. (1,5 điểm)

Có 3 hộp, mỗi hộp đựng 8 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 tấm thẻ là một số lẻ.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho đường tròn *(O)* và hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ và M_1, M_2 là tiếp điểm của đường tròn *(O)* với $(O_1), (O_2)$. Tiếp tuyến chung tại *I* của $(O_1), (O_2)$ cắt đường tròn *(O)* tại *A*, AM_1 cắt (O_1) tại N_1, AM_2 cắt (O_2) tại N_2.

a) Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$
b) N_1N_2 cắt *(O)* ở *B*, *C*; *AI* cắt đường tròn (O) ở *A'*. Chứng minh rằng *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *A'BC*
c) Chứng minh rằng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Câu 5. (2,5 điểm) Tồn tại hay không các số nguyên dương *a*, *b* thỏa mãn

2a-1; 2b-1; a+b là các số nguyên tố đồng thời $\frac{a^b + b^a}{a+b}$ là số nguyên.

……………………..Hết………………………

HƯỚNG DẪN CHẤM *(4 trang)*

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>Cho x=y=0 ta có $f(0) = 0 - f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
Cho y=0, x tùy ý ta có $f(x^2) = xf(x), \forall x \in R$
Cho x=0, y tùy ý ta có $f(-y) = -f(y), \forall y \in R$. Vậy f là hàm lẻ.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Với x>0 ta có
$$f(x+y) = \sqrt{x}f(\sqrt{x}) - f(-y) = f(x) + f(y)$$
Với x<0 ta có
$$f(y) = f(x+y-x) = f(-x+x+y) = f(-x) + f(x+y)$$
$$= -f(x) + f(x+y)$$
$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Vậy $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Ta có
$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)[f(x) + f(1)]$$
$$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$$
$$\Rightarrow xf(1) = f(x)$$
Vậy $f(x) = ax$ với $a = f(1)$
Thử lại thấy thỏa mãn</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Ta có $nx_n = -2019(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$
$(n-1)x_{n-1} = -2019(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2})$
$\Rightarrow nx_n - (n-1)x_{n-1} = -2019\, x_{n-1} \Rightarrow nx_n = (n-2020)x_{n-1}$
$\Rightarrow x_n = 0, \forall n \geq 2020$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Ta có $x_k = \frac{k-2020}{k}\ x_{k-1};\ \forall\ 1 \leq k \leq 2019$ nên
$$x_1 = \frac{-2019}{1}x_0;\ \ x_2 = \frac{-2018}{2}x_1; \ldots; x_k = \frac{k-2020}{k}x_{k-1} \text{ với } 1 \leq k \leq 2019$$
$$\Rightarrow x_1x_2x_3 \ldots x_k = \frac{-2019}{1}x_0.\frac{-2018}{2}x_1 \ldots \frac{k-2020}{k}x_{k-1}$$
$$\Rightarrow x_k = \frac{(-1)^k 2019.2018\ldots(2020-k)}{k!} = (-1)^k\frac{2019!}{k!(2019-k)!} = C_{2019}^k(-1)^k$$
với $1 \leq k \leq 2019$</td><td>1,0</td></tr>
</table>

	$u_n = \frac{1}{n}(x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^n x_n)$ $= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2019} x_k.2^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k(-1)^k.2^k = \frac{1}{n}(1-2)^{2019}$ $= \frac{-1}{n}$ Vậy $limu_n = 0$	**0,5**
3	Không gian mẫu $\Omega = \{(\mathrm{i}; \mathrm{j}; \mathrm{k}), 1 \leq \mathrm{i}; \mathrm{j}; \mathrm{k} \leq 8\}$; $n(\Omega) = 8.8.8 = 729$	**0,5**
	Kí hiệu A:" tổng 3 số ghi trên 3 tấm thẻ là một số lẻ". Xét bộ (i; j; k)ϵA bất kì thì *i*+*j*+*k* là số lẻ Nếu i+j lẻ thì k chẵn, tức là k nhận 4 giá trị 2, 4, 6, 8 Nếu i+j chẵn thì k lẻ tức là k nhận 4 giá trị 1, 3, 5, 7	**0,5**
	Số các cặp số (i; j) là 8.8=64 Vậy n(A)=64.4=256, do đó $P(A) = \frac{1}{2}$	**0,5**
4		**1,0**

	A thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $\overline{AN_1}.\overline{AM_1} = \overline{AN_2}.\overline{AM_2}$ suy ra 4 điểm $N_1;\ N_2; M_2;\ M_1$ tạo thành một tứ giác nội tiếp dẫn đến $\widehat{AN_1N_2}$= $\widehat{AM_2M_1} \Rightarrow$ $sđ\ BM_1 + sđAC = sđ\ BM_1 + sđAB \Rightarrow AC = AB \Rightarrow OA \perp N_1N_2$	
	Gọi H, K là giao điểm của AO với BC và (O) Tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao$\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK}$ $\widehat{AM_1K} = 90° \Rightarrow HN_1M_1K$ là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow$ $AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK} = \overline{AN_1}.\overline{AM_1} = AI^2$ $\Rightarrow AB = AC = AI$	**0,5**
	Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC Dẫn đến $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\ \widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{A'AC} = \frac{1}{2}\widehat{A'BC}$ Suy ra BI là đường phân giác của A'BC Rõ ràng A'I là phân giác $\widehat{BA'C}$. Vì thê I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác A'BC	**0,5**
	Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D. Gọi R, R_1, R_2 là bán kính của $(O),(O_1),(O_2)$ Rõ ràng D là tâm vị tự ngoài của $(O_1),(O_2) \Rightarrow \frac{DO_1}{DO_2}.\frac{M_2O_2}{M_2O}.\frac{M_1O}{M_1O_1}$=1 Dẫn đến D, M_1, M_2 thẳng hàng Vậy N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy	**0,5**
5	Giả sử tồn tại *a; b* nguyên dương thỏa mãn yêu cầu $\Rightarrow a; b \geq 2 \Rightarrow a + b \geq 4$ Mà a; b là số nguyên tố nên a+b lẻ $\Rightarrow$ a; b khác tính chẵn lẻ.	**0,5**
	Không mất tổng quát giả sử a chẵn, b lẻ. Vì $\frac{a^b+b^a}{a+b} \in Z$ nên $(a^b + b^a) \vdots (a + b)$. Ta có $a^b + b^a$= $(a^b + b^b) + b^a - b^b$ Vì b lẻ nên $(a^b + b^b) \vdots (a + b) \Rightarrow$ $(b^a - b^b) \vdots (a + b)$	**0,5**
	Với a> b (trường hợp a< b ta viết ngược lại $(b^b - b^a) \vdots (a + b)$) ta có $b^b(b^{a-b} - 1) \vdots (a + b)$ Do a+b là số nguyên tố nên (b; a+b)=1 $\Rightarrow \begin{cases}(b^{a+b-1} - 1) \vdots (a + b)\\ (b^{a-b} - 1) \vdots (a + b)\end{cases}$	**0,5**

	Gọi d là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $(b^d - 1) \vdots (a+b)$ Khi đó $\begin{cases}(a+b-1) \vdots d \\ (a-b) \vdots d\end{cases} \Rightarrow (2a-1) \vdots d$ mà *2a-1* là số nguyên tố nên *d=1* hoặc *d=2a-1*	**0,5**
	Nếu *d=1* thì $(b-1) \vdots (a+b)$ vô lí Nếu *d=2a-1* thì $(a-b) \vdots (2a-1) \Rightarrow a-b \geq 2a-1 \Rightarrow a \leq 1-b$ (vô lí) Vậy không tồn tại 2 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.	**0,5**