SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ 5
NĂM HỌC 2018-2019
Môn: Toán lớp 11
Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề gồm có 5 câu, 1 trang)

Câu 1. (1,5 điểm) Chứng minh rằng $\{u_n\}$ là dãy hội tụ với $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$u_1 = a \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n^2) - 2019.$$

Câu 2. (2 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 + f(xy)) = x.f(x+y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Câu 3. (2 điểm) Tìm tất cả các số $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $ab \mid \left(2^{2^a}+1\right)\left(2^{2^b}+1\right)$

Câu 4. (3 điểm) Cho ΔABC không cân với I là tâm đường tròn nội tiếp; I_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A; I'_A là điểm đối xứng của I_A qua BC và l_a là đường thẳng đối xứng với AI'_A qua AI . Các điểm I_B; I'_B và đường thẳng l_b xác định tương tự. Gọi $P = l_a \cap l_b$.

a) P, I, O thẳng hàng với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

b) Một tiếp tuyến từ P với đường tròn nội tiếp ΔABC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại X và Y. Chứng minh rằng $XIY = 120^0$

Câu 5. (1,5 điểm) Cho bàn cờ 5x5 trống. Hai đối thủ chơi một trò chơi theo lượt như sau: mỗi đấu thủ đến phiên mình đặt một quân cờ đen hay trắng vào một ô trống của bàn cờ. Khi bàn cờ đã đầy thì đấu thủ A sẽ được một điểm cho mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đi qua ô trung tâm có số quân cờ đen là số chẵn. Đấu thủ B được một điểm cho mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đi qua ô trung tâm có số quân cờ đen là số lẻ. Hỏi có trường hợp hai đối thủ hòa nhau hay không ? Nếu A đi trước thì có cách nào để A không thua hay không ? Vì sao ?

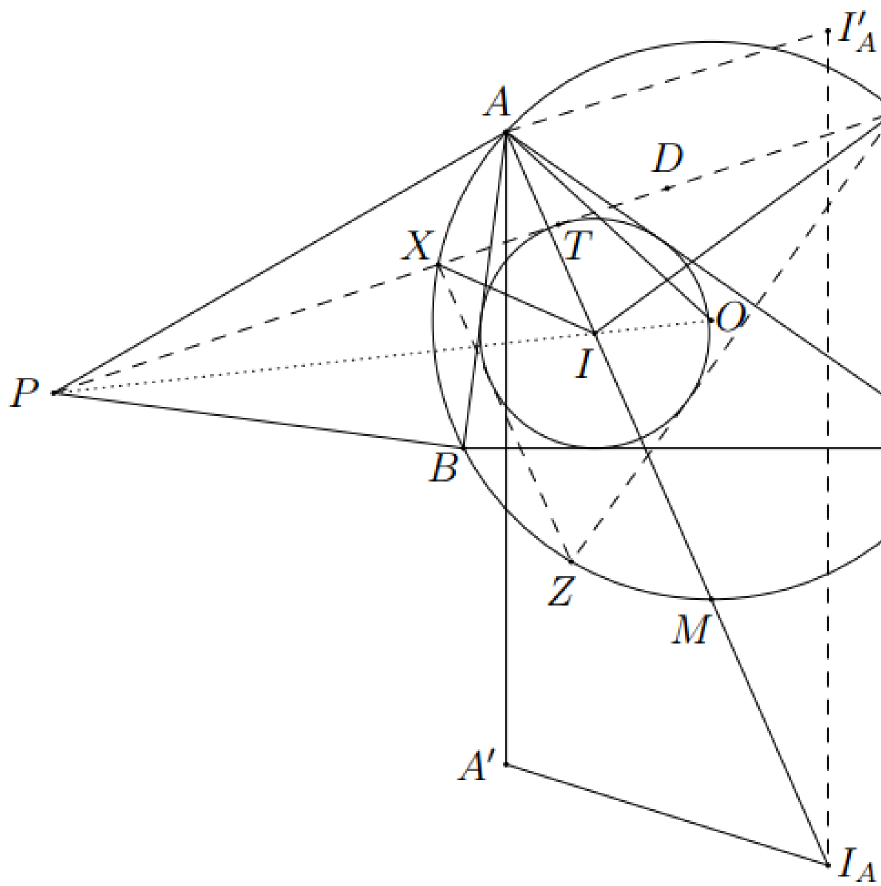
……………………..Hết………………………

HƯỚNG DẪN CHẤM *(5 trang)*

Câu	Nội dung	Điểm
1	Hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-2019$ là hàm liên tục và $\lvert f'(x)\rvert=\left\lvert\frac{x}{1+x^2}\right\rvert\le\frac{1}{2}\quad\forall x$	0,5
	Xét hàm $g(x)=x-f(x)$. Ta có $g'(x)=1-f'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ Lại có $g(0).g(-2019)=-2019\frac{1}{2}\ln(1+2019^2)<0.$. Như vậy phương trình $g(x)=0$ hay $f(x)=x$ có duy nhất nghiệm. Gọi nghiệm đó là L.	0,5
	Ta có theo định lý Lagrange, tồn tại số $c\in\mathbb{R}$ để : $\lvert u_{n+1}-L\rvert=\lvert f(u_n)-f(L)\rvert=\lvert f'(c)\rvert\lvert u_n-L\rvert\le\frac{1}{2}.\lvert u_n-L\rvert$ Do đó $0\le\lvert u_n-L\rvert\le(\frac{1}{2})^{n-1}.\lvert u_1-L\rvert$ Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$	0,5
2	Kí hiệu $P(x;y)$ là phép thế $(x;y)$ vào phương trình $f(x^2+f(xy))=x.f(x+y)$ Xét $P(1;-1)$ ta có $f(1+f(-1))=f(0)$. Thay $P(-1;1)$ ta có $f(1+f(-1))=-f(0)$. $\Rightarrow f(0)=0$. Xét $P(x;0)$ và $P(-x;0)$ ta có $f(x^2)=x.f(x)=(-x).f(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)=f(-x)\Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ.	0,5
	<u>TH1</u>: Giả sử $\exists a\ne0$ để $f(a)=0$. +) Xét $P(x;0)$ và $P\left(x;\frac{a}{x}\right)$ với $x\ne0$ $\Rightarrow f(x^2)=x.f(x)=x.f(x+\frac{a}{x})$ với $x\ne0$ $\Rightarrow f(x)=f(x+\frac{a}{x})\ \forall x\ne0.$ ***(1)*** +) Xét $P(x;-x)$ ta có $f(x^2+f(-x^2))=0$. ***(2)*** +) Xét $P(x;-x-\frac{a}{x^3})$ ta có $f(x^2+f(-x^2-\frac{a}{x^2}))=x.f(-\frac{a}{x^3})$ ***(3)*** Từ ***(1); (2)*** và ***(3)*** ta có: $f(-\frac{a}{x^3})=0\ \ \forall x\ne0$ Như vậy $f(x)=0\forall x\in R$. Thử lại ta thấy thỏa mãn **<u>TH2</u>**: $f(a)=0\Leftrightarrow a=0$.	1,0 0,5

	Xét $P(x;-x)$ ta có $f(x^2+f(-x^2))=0$. $\Rightarrow f(-x^2)=-x^2\ \ \forall x$ Lại có $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(x)=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ Thử lại ta thấy thỏa mãn.	
3	Ta có thể thấy ngay $a;b$ là các số nguyên dương. Giả sử $\exists p\,\|\,a$; p là số nguyên tố sao cho $p\,\|\,(2^{2^a}+1)$. Khi đó $2^{2^{a+1}}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow ord_p 2\,\|\,2^{a+1}$ $\Rightarrow ord_p 2$ có dạng 2^h với $h\in N$.	**0,5**
	Lại có $ord_p 2$ không là ước của 2^a do $2^{2^a}\equiv -1(\bmod p)$ Như vậy $ord_p 2=2^{a+1}$ Nhưng vì $ord_p 2\,\|\,p-1$ nên $2^{a+1}\,\|\,p-1\ \Rightarrow 2^{a+1}\le p-1\le a-1$, vô lý !!! Vậy $b\,\|\,2^{2^a}+1$ và $a\,\|\,2^{2^b}+1$	**0,5**
	Giả sử cả hai số $a;b\ge 2$. Ko giảm tổng quát ta xét $a\ge b$. Khi đó gọi q là một ước nguyên tố của b thì tương tự phần trên ta có ngay $ord_q 2=2^{a+1}$ $\Rightarrow 2^{a+1}\le q-1\le b-1$, vô lý !!!. Vậy $b=1$	**0,5**
	Thay vào và kết hợp với việc $(2^{2^a}+1;a)=1$ với $a\le 2$ ta có các đáp án là $(1;1)$; $(1;5)$ và $(5;1)$	**0,5**

4a) **0,5**



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua BC và M là giao điểm của AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có cặp tam giác đồng dạng $ABA' \sim AOC$; lại có cặp tam giác đồng dạng $ABI_A \sim AIC$ nên:

$$\frac{AA'}{AI_A} = \frac{AA'}{AB}\frac{AB}{AI_A} = \frac{AC}{AO}\frac{AI}{AC} = \frac{AI}{AC}$$

Lại có $A'AI_A = AIO$ nên hai tam giác $AA'I_A$ và AIO đồng dạng.

4b) **1**

Kí hiệu P' là giao của hai đường thẳng AP và OI.

Ta có $MAP' = I'_A AI_A = I'_A AA' - I_A AA' = AIO - AMO = MOP'$

Như vậy tứ giác $MOAP'$ nội tiếp.

Ta có $IP' = \dfrac{IA.IM}{IO} = \dfrac{IO^2 - R^2}{IO}$

Như vậy nếu đặt $P^* = BP \cap OI$ thì $IP^* = \dfrac{IA.IM}{IO} = \dfrac{IO^2 - R^2}{IO}$; hay nói cách khác $P \equiv P^*$

Vậy P nằm trên đường thẳng OI

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Theo bổ đề Poncelet, hai tiếp tuyến còn lại của X và Y với đường tròn nội tiếp ΔABC sẽ cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi điểm đó là Z.
Đặt T là giao của XY với đường tròn (I); D là trung điểm của XY.
Ta có :
$OD = IT.\frac{OP}{IP} = r(1+\frac{OI}{IP})$
$= r\left(1+\frac{OI^2}{OI.IP}\right) = r\left(1+\frac{R^2-2Rr}{R^2-OI^2}\right) = r\left(1+\frac{R^2-2Rr}{2Rr}\right)$
$= \frac{R}{2} = \frac{OX}{2}$

Như vậy $XZY = 60^0$ hay $XIY = 120^0$.</td>
<td>1,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>Ta đặt ở giữa quân cờ màu trắng; hai ô ở cùng hàng bên cạnh ô chính giữa cũng đặt màu trắng. Tất cả các ô còn lại đặt quân cờ màu đen hết. Như vậy A và B sẽ hòa nhau.
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>T</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>T</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>T</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>A hoàn toàn có cách đi để chắc chắn thắng.
Ở bước 1, A đặt quân cờ trắng vào ô chính giữa.
Trong các bước còn lại, nếu B đặt quân cờ màu gì ở ô nào thì A đặt tiếp ở vị trí đối xứng với ô mà B đặt qua ô trung tâm; và quân cờ của A đặt khác màu quân cờ B đặt.
Ví dụ ở hai bước như bảng:</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

	Đ			
		T		
			T	

B đặt quân đen ở ô (2;2) thì A đặt quân trắng vào ô (4;4)

	T			
		T		
			Đ	

B đặt quân trắng vào ô (2;1) thì A đặt quân đen vào ô (4;5)

Như vậy, ta thấy ngay 2 đường chéo qua ô trung tâm; hàng và cột chứa ô trung tâm đều có chắc chắn 2 ô đen và 3 ô trắng

$\Rightarrow$ A có ít nhất 4 điểm.

Lại có xét hai cột 1 và 5 ta thấy; tổng số ô đen và ô trắng ở hai cột này sẽ bằng nhau do tính đối xứng qua ô trung tâm. Vậy tổng hai cột có 5 ô đen.

$\Rightarrow$ chắc chắn có một cột chứa chẵn ô đen; một cột chứa lẻ ô đen.

Tương tự với cột 2 và cột 4; hàng 1 và hàng 5; hàng 2 và hàng 4

$\Rightarrow$ A sẽ có 8 điểm; còn B có 4 điểm. Như vậy A là người chiến thắng