SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG TỈNH LẦN I
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN- KHỐI: 12

Thời gian làm bài:180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)
Ngày thi: 8 tháng 9 năm 2018

Câu 1(2 điểm) 1) Một công ty muốn thiết kế một loại hộp có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông sao cho thể tích của khối hộp là 8 dm^3 và diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm độ dài cạnh đáy của hộp.
2) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 2(2 điểm) 1) Giải phương trình $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$
2) Giải bất phương trình $x^2 + 4x + 5 < 3(x+1)\sqrt{x+2}$

Câu 3(3 điểm) 1)Hình tứ diện ABCD có E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD, hai điểm M và N lần lượt nằm trên cạnh AC và BD sao cho AC=3AM, BD=3BN. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, M, N đồng phẳng.
2) Khối chóp S.ABC có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $BAC = 120^0$. Tính thể tích khối chóp theo a.
3) Khối chóp tam giác S.ABC có $SA = BC = x$ thay đổi, các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích của khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4(2 điểm) 1) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 trong đó các chữ số 1 và 6 đều có mặt đúng hai lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ?
2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba góc nhọn và hai đường cao AE, CF. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF có phương trình $(x-2)^2 + y^2 = 5, AC = 4\sqrt{5}$, điểm M thuộc đường thẳng $x + 3 = 0$, điểm A thuộc đường thẳng $x + 2y - 7 = 0$. Tìm tọa độ của điểm A.

Câu 5(1 điểm) Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{27}{32} \times \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

--------------------------Hết--------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI NĂNG KHIẾU MÔN TOÁN KHỐI 12
NĂM HỌC 2018-2019
(Hướng dẫn chấm gồm có trang)

Câu 1 : 1)(1 điểm) Gọi cạnh đáy là x, chiều cao là h. Diện tích toàn phần là

$S = 2x^2 + 4xh$

$V = 8 \Rightarrow x^2h = 8 \Rightarrow h = \frac{8}{x^2} \Rightarrow S = 2x^2 + \frac{32}{x} = f(x)$

$f'(x) = \frac{4x^3 - 32}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Lập BBT ta thấy f(x) đạt min khi x=2. Vậy cạnh đáy là 2dm.

2)(1 điểm) y'=0 $\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ (1)

(1) có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1-\sqrt{3} \\ m > -1+\sqrt{3} \end{array}\right.$ (2)

Ta có $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$ (3)

Dùng Viet cho (1) rồi thay vào (3) ta được m=-3 hoặc m=1, thỏa mãn (2)

Câu 2: 1)(1 điểm) Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$. Pt $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 1) + (\sqrt{5x+4} - 2) = 3x^2 - x$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2} = x(3x-1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} = 3x - 1 (*) \end{array}\right.$

Với x=1 thì thỏa mãn (*)
Nếu x<1 thì VT(*)>2>VP(*): loại. Vậy Nếu x>1 thì VT(*)<2<VP(*): loại
pt có 2 nghiệm x=0, x=1.

2)(1 điểm) Điều kiện: $x \ge -2$. Bpt $\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2(x+2) < 3(x+1)\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \left[(x+1) - \sqrt{x+2}\right].\left[(x+1) - 2\sqrt{x+2}\right] < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x+1 < 2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 7 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1+\sqrt{8}$ (thỏa mãn điều kiện)

Câu 3: 1)(1 điểm) Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}.$ Ta có

$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ (1)

$\overrightarrow{EM}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c} \Rightarrow 6\overrightarrow{EM}=-3\vec{b}+2\vec{c}; \overrightarrow{EN}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d} \Rightarrow 6\overrightarrow{EN}=\vec{b}+2\vec{d}$ (2)

Từ (1),(2) ta được $6\overrightarrow{EM}+6\overrightarrow{EN}=-2\vec{b}+2\vec{c}+2\vec{d}=4\overrightarrow{EF}$ (3)

Từ (3) suy ra $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}, \overrightarrow{EF}$ đồng phẳng nên E,F,M,N đồng phẳng.

2)(1 điểm) Vì SB=SC nên AB=AC. Dùng định lý côsin cho tam giác ABC ta được

AB=AC=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SAB có $SA^2=SB^2-AB^2 \Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

3)(1 điểm) Lấy M là trung điểm SA, ta có SA vuông góc với (MBC) và tam giác MBC cân tại M.

Kí hiệu V là thể tích khối chóp S.ABC, ta có $V=V_{SMBC}+V_{AMBC}$

Từ đó tính được $V=\frac{1}{6}x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$

Xét $\left(x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)^2=16.\frac{x^2}{4}.\frac{x^2}{4}(1-\frac{x^2}{2})$, dùng bđt Cauchy 3 số ta thấy biểu thức này đạt max

(tức là V đạt max) khi $\frac{x^2}{4}=1-\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

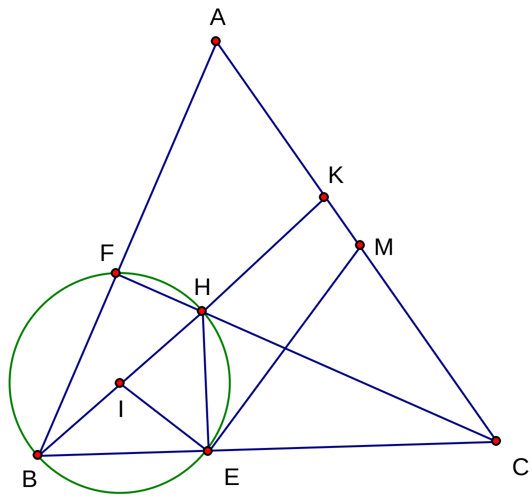
Câu 4 : 1)(1 điểm) Chọn 2 trong 8 vị trí để điền 2 chữ số 1: có $C_8^2=28$ cách

Chọn 2 trong 6 vị trí còn lại để điền 2 chữ số 6: có $C_6^2=15$ cách

Xếp 4 chữ số còn lại : có 4!=24 cách

Vậy ta có 28.15.24=10080 số

2)(1 điểm)



Gọi H = AE $\cap$ CF. Vì $\widehat{BEH} = \widehat{BFH} = 90^0$ nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEF$ cũng là đường tròn đường kính BH có tâm I là trung điểm của BH
Ta chứng minh ME tiếp xúc với đường tròn đường kính BH tại E

$\Leftrightarrow \widehat{IEM} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{IEH} + \widehat{HEM} = 90^0$ (1)

Vì $\triangle IEH$ cân tại I và $\triangle MAE$ cân tại M nên $\widehat{IEH} = \widehat{IHE};\ \widehat{HEM} = \widehat{MAE}$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow \widehat{IHE} + \widehat{MAE} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{AHK} + \widehat{MAE} = 90^0$ (luôn đúng)

(Ở đây K = BH $\cap$ AC)

Như vậy ME là tiếp tuyến tại E của đường tròn đường kính BH
Khi đó $IM^2 = IE^2 + ME^2 = R^2 + ME^2 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow IM = 5$

Vì M thuộc đường thẳng x + 3 = 0 nên giả sử M(-3;y) ta có

IM = 5 $\Leftrightarrow \sqrt{(-3-2)^2 + (y-0)^2} = 5 \Leftrightarrow y = 0$ vậy M(-3;0)
Do A thuộc đường thẳng x + 2y -7 =0 nên giả sử A(7-2y; y)

Ta có MA = ME = $2\sqrt{5} \Leftrightarrow MA^2 = 20 \Leftrightarrow (10-2y)^2 + y^2 = 20$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 40y + 80 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = 4$. Vậy A(-1;4)

Câu 5 (1 điểm)

Ký hiệu VT là biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức. Ta có

$$VT - \frac{3}{2} = \frac{2\sum a(a+b)(a+c) - 3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2(a^3+b^3+c^3) - \sum a^2(b+c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} (1)$$

Ta thấy

$$2(a^3+b^3+c^3) - \sum a^2(b+c) = \left(a^3+b^3+c^3+3abc - \sum a^2(b+c)\right) + a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\geq a^3+b^3+c^3-3abc$$

(sử dụng kết quả quen thuộc $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum a^2(b+c)$) (xem chứng minh phía dưới), suy ra $\dfrac{2(a^3+b^3+c^3) - \sum a^2(b+c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$ (2)

Hơn nữa $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= \frac{1}{2}((a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$

Và 2(a+b)(b+c)(c+a) $\leq 2\left(\dfrac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3 = \dfrac{16}{27}\left(a+b+c\right)^3$ (3)

Từ (1);(2);(3) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c. Cuối cùng ta chứng minh bất đẳng thức đã sử dụng ở trên: $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum a^2(b+c)$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0 (*)$

Giả sử $a \geq b \geq c$.khi đó $c(c-a)(c-b) \geq 0 (4)$

Hơn nữa $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) = a(a-b)\left[(a-b)+(b-c)\right]+b(b-c)(b-a)$

$= a(a-b)^2 + a(a-b)(b-c) - b(b-c)(a-b)$

$= a(a-b)^2 + (a-b)(b-c)(a-b) \geq 0 (5)$

Từ $(4)(5) \Rightarrow (*)$ đúng