SỞ GD& ĐT HẢI DƯƠNG **ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN LẦN HAI**

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI **NĂM HỌC 2018-2019**

Ngày thi: 17/9/2018 ***Thời gian làm bài: 180 Phút***

Câu 1(5 điểm) Cho dãy số (x_n) (n = 1, 2, …) được xác định như sau:

$x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$ với n = 1, 2, …

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 2}$ (n = 1, 2, ….). Tìm $\lim_{n\to\infty} y_n$

Câu 2(5 điểm) Cho $P(x) \in Z[x]$ và mỗi phương trình $P(x) = 1; P(x) = 2; P(x) = 3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Chưng minh phương trình $P(x) = 5$ không có hơn một nghiệm nguyên

Câu 3. (5 điểm) Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường tròn tâm X tiếp xúc với tia AB, AD lần lượt tại E và F, đồng thời tiếp xúc đường tròn (O) tại T. Tiếp tuyến tại A và T với (O) cắt nhau tại K. Đường thẳng TE cắt (O) tại điểm M khác T, đường thẳng TF cắt (O) tại N khác T.

a) Chứng minh K, M,N thẳng hàng
b) Phân giác góc $\angle BAC$ cắt đường thẳng MC tại I, đường thẳng KI cắt đường thẳng CN tại J. Chứng minh rằng nếu N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADJ thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD bằng nhau.

Câu 4. (5 điểm) Với số n nguyên dương, đặt $f(n)$ là số ước nguyên dương của n.Xét tập hợp $G = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f(m) < f(n) \forall m \in \mathbb{N}, 0 < m < n\}$ và gọi p_i là số nguyên tố thứ i (i=1; 2; 3…).

1) Chứng minh nếu n thuộc G và p_m là ước của n thì $p_1 p_2 \cdots p_m$ là ước của n
2) Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^k > p_m$ và $M = (p_1 p_2 \cdots p_{m-1})^{2k}$. Chứng minh nếu n > M và n thuộc G thì n chia hết cho p_m .

ĐÁP ÁN 12 Toán

Câu 1. (5 điểm) Cho dãy số (x_n) (n = 1, 2, …) được xác định như sau:

$x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$ với n = 1, 2, …

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2}$ (n = 1, 2, ….). Tìm $\lim_{n\to\infty} y_n$

Lời giải:

Ta có $x_2 = 5$ và $x_n > 0$ với mọi n = 1, 2, …

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{\left(x_n^2+3x_n\right)\left(x_n^2+3x_n+2\right)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}+1 = x_n^2+3x_n+2 = (x_n+1)(x_n+2)$$

$$\frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{(x_n+1)(x_n+2)} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_n+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n+2} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$$

Do đó $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_{i+1}+1}\right) = \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$

Từ (1) $x_{k+1} = x_k^2+3x_k+1 > 3x_k \geq 3.3^{k-1} = 3^k$

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $x_n > 3^{n-1}$ (2)

Nên $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$ (vì do (2) $x_{n+1} > 3^n$)

Câu 2. (5 điểm) Cho $P(x) \in Z[x]$ và mỗi phương trình $P(x)=1; P(x)=2; P(x)=3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Chưng minh phương trình $P(x)=5$ không có hơn một nghiệm nguyên

Lời giải:

Ta chứng minh rằng x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.

Ta có $P(x)=(x-x_2).q(x)+2$ với $q(x)\in Z[x]$

Cho $x=x_1$ và $x=x_3$, ta được

$$1=P(x_1)=(x_1-x_2)q(x_1)+2\Rightarrow(x_1-x_2)q(x_1)=-1$$
$$3=P(x_3)=(x_3-x_2)q(x_3)+2\Rightarrow(x_3-x_2)q(x_3)=1$$

Vì $x_1-x_2; x_3-x_2; q(x_3); q(x_3)$ là những số nguyên nên x_1-x_2 và x_3-x_2 chỉ có thể bằng ± 1. Nhưng $x_1\neq x_3$ nên:

Hoặc $x_1-x_2=1$ và $x_3-x_2=-1$

Hoặc $x_1-x_2=-1$ và $x_3-x_2=1$

Do đó x_2 là trung bình cộng của x_1,x_3

Giả sử phương trình $P(x)=2$ còn có một nghiệm nguyên $x'_2\neq x_2$. Lặp lại lập luận trên cho 3 số x_1,x_2,x_3 thì ta lấy $x'_2=x_2$ (mâu thuẫn)

Vậy x_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $P(x)=2$

Hướng dẫn giải tương tự cho $P(x)=1; P(x)=3$

Giả sử phương trình $P(x)=5$ có một nghiệm nguyên x_5, ta có:

$$5=P(x_5)=(x_5-x_2)q(x_5)+2\Rightarrow(x_5-x_2)q(x_5)=3$$

Nếu x_5-x_2 chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 3

Nếu $x_5-x_2=\pm 1$ thì theo chứng minh trên x_5 phải trùng với x_1 hoặc x_3. Vô lý vì x_5 khác với x_1 và x_3. Do đó chỉ có thể xảy ra khả năng $x_5-x_2=\pm 3$

Mà $\quad P(x)=(x-x_3)r(x)+3; r(x)\in Z[x]$

$\Rightarrow 5=P(x_5)=(x_5-x_3)r(x_5)+3\Rightarrow(x_5-x_3)r(x_5)=2$

Suy ra x_5-x_3 chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 2. Có thể thấy

$x_5-x_3=\pm 1$ (mâu thuẫn). Nên $x_5-x_3=\pm 2$ do đó:

Nếu $x_1-x_2=1$ và $x_3-x_2=-1$ thì $x_5-x_2=-3$

Nếu $x_1-x_2=-1$ và $x_3-x_2=1$ thì $x_5-x_2=3$

Như vậy nghiệm nguyên x_5 (nếu nó tồn tại) của phương trình $P(x)=5$ được xác định hoàn toàn bởi x_1,x_2,x_3. Các số này là duy nhất. Vậy $P(x)=5$ không thể có hơn một nghiệm nguyên.

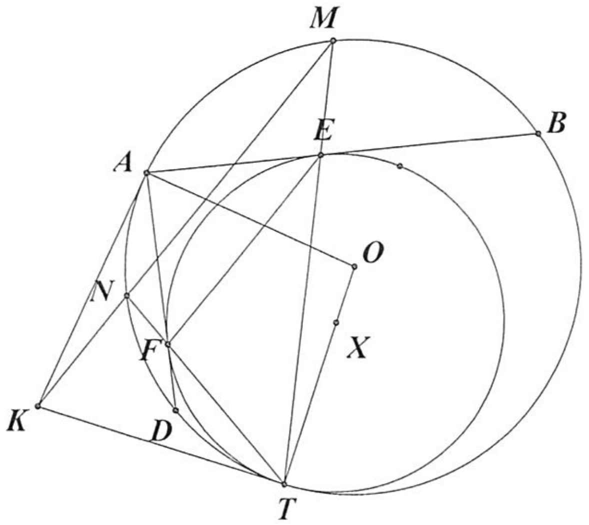
Câu 3. (5 điểm) *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường tròn tâm X tiếp xúc với tia AB, AD lần lượt tại E và F, đồng thời tiếp xúc đường tròn (O) tại T. Tiếp tuyến tại A và*

T với (O) cắt nhau tại K. Đường thẳng TE cắt (O) tại điểm M khác T, đường thẳng TF cắt (O) tại N khác T.

c) *Chứng minh K, M,N thẳng hàng*

d) *Phân giác góc $\angle BAC$ cắt đường thẳng MC tại I, đường thẳng KI cắt đường thẳng CN tại J. Chứng minh rằng nếu N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADJ thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD bằng nhau.*

Lời giải:



a)

+) Xét phép vị tự tâm T, tỉ số k biến đường tròn (X) thành đường tròn (O). Khi đó

Vì T,E,M thẳng hàng và E thuộc (X), M thuộc (O) nên $V_T^k : E \mapsto M$

Từ đó $XE \parallel OM$ nên $OM \perp AB$, ta được M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O).

Tương tự: N là điểm chính giữa cung nhỏ BD của (O)

(1,0 điểm)

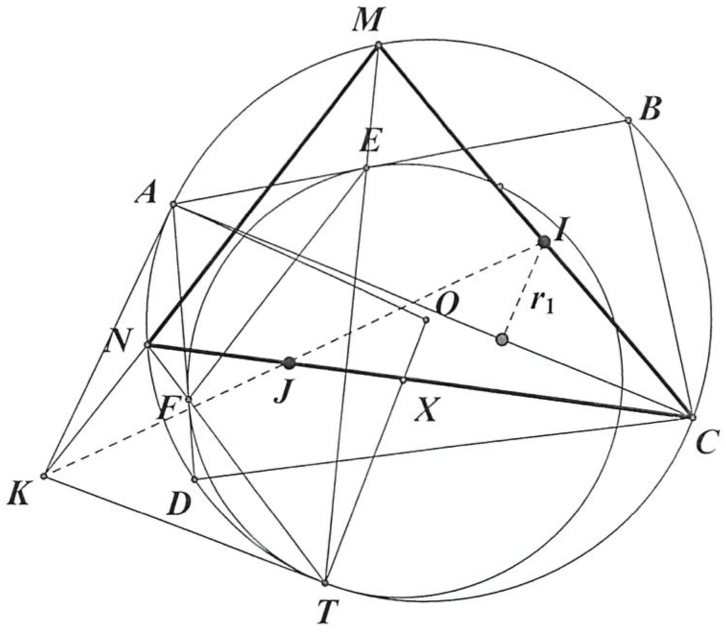
+) Để chứng minh K,M,N thẳng hàng, ta chứng minh $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{TN}{TM}$ (hay AMTN là tứ giác điều hòa, đây là kết quả quen thuộc với hình phẳng chuyên). Thật vậy:

$\angle MAE = \angle MTB = \angle MTA$ nên tam giác MAE và tam giác MTA đồng dạng. Ta được $MA^2 = ME.MT$. Tương tự $NA^2 = NF.NT$

Suy ra $\dfrac{AN^2}{AM^2} = \dfrac{NF}{ME}.\dfrac{NT}{MT} = \dfrac{NT^2}{MT^2}$ .Vậy $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{TN}{TM}$ nên K,M,N thẳng hàng

(1,5 điểm)

b)



Phân giác góc $\angle BAC$ cắt CM tại I, mà CM là phân giác góc $\angle ACB$ nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ngoài ra, J thuộc CN là phân giác góc $\angle ACD$ và $NJ = NA = ND$ nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

(1,0 điểm)

Gọi r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ADC. Do K,I,J thẳng hàng nên theo định lý Menelaus cho tam giác MCN với cát tuyến KIJ, ta có: $\frac{IC}{IM}.\frac{KM}{KN}.\frac{JN}{JC}=1$

Mặt khác: $\frac{KM}{KN}=\frac{AM}{AN}.\frac{\sin\angle MAK}{\sin\angle NAK}=\frac{AM}{AN}\frac{\sin\angle MCK}{\sin\angle NCA}=\frac{MI}{NJ}\frac{\sin\angle MCK}{\sin\angle NCA}$

Suy ra $\frac{JC}{IC}=\frac{\sin\angle MCK}{\sin\angle NCA}$ hay $JC.\sin\angle NCA = IC.\sin\angle MCK$

Tức là $r_1 = r_2$. Ta có điều phải chứng minh

Câu 4. (5 điểm) *Với số n nguyên dương, đặt $f(n)$ là số ước nguyên dương của n.Xét tập hợp $G=\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}: f(m)<f(n)\forall m\in\mathbb{N}, 0<m<n\}$ và gọi p_i là số nguyên tố thứ i (i=1; 2; 3...).*

2) Chứng minh nếu n thuộc G và p_m là ước của n thì $p_1p_2\dots p_m$ là ước của n

2) Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^k > p_m$ và $M=(p_1p_2\dots p_{m-1})^{2k}$. Chứng minh nếu $n > M$ và n thuộc G thì n chia hết cho p_m.

Lời giải:

Nhận xét: Nếu $n = q_1^{k_1}q_2^{k_2}\dots q_m^{k_m}$ là phân tích tiêu chuẩn của n thì

$$f(n)=(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)$$

1) Giả sử ngược lại, tồn tại i: $1 \le i < m$ mà n không chia hết cho p_i

Đặt $n = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_t^{k_t}$ với $q_j = p_m$ thì $f(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_j+1)\ldots(k_t+1)$

Xét $n_0 = \dfrac{n}{p_m}.p_i = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_j^{k_j - 1} \ldots q_t^{k_t}.p_i$ thì $f(n_0) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots k_j \ldots (k_t+1).2$

Do $2k_j \ge k_j + 1$ nên $f(n_0) \ge f(n)$ trong khi $n_0 < n$ vì $p_i < p_m$

Đây là điều mâu thuẫn. Vậy n chia hết cho p_i với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$

2) Xét $n \in G$ và n>M. Giả sử n không chia hết cho p_m thì mọi ước của n đều thuộc tập $\{p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}\}$.

Thật vậy, giả sử n có ước $p_j > p_m$ thì theo câu 1, n chia hết cho $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots, p_j$. Mâu thuẫn.

Mặt khác n>M nên tồn tại i: $1 \le i \le m-1$ sao cho số mũ của p_i trong n là h>2k

Do $p_i^k \ge 2^k > p_m$ nên đặt $n_1 = \dfrac{n}{p_i^k}$ và $n_0 = n_1.p_m < n$

Mặt khác, nếu $n = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_t^{k_t}$ với $q_j = p_i$ thì $k_j = h$ và

$$f(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(h+1)\ldots(k_t+1)$$

$$f(n_0) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(h-k+1)\ldots(k_t+1).2$$

Vì $2(h-k+1) > h+1 \leftrightarrow h+1 > 2k$ luôn đúng nên $f(n_0) > f(n)$. Mâu thuẫn.

Vậy có điều phải chứng minh