SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG **Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi**	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ NĂM** **NĂM HỌC 2020-2021** **Môn: Toán 10** *Thời gian làm bài: 180 phút*

Câu 1. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1) \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm số nguyên dương n sao cho tồn tại hai số nguyên tố $p;r$ thỏa mãn $n=p(p^2-p-1)=r(2r+1)$

Câu 3. (1,5 điểm)

Tìm đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(0)=P(1)=P(2)$ và $P(P(x))=[P(x)]^2$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $H;M$ lần lượt là trung điểm của $BC;AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt đoạn AH tại D và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn BM tại K. Gọi I là giao điểm của AK với BD và E là giao điểm của CI với BM .Chứng minh rằng:

a) Tam giác AKC vuông.
b) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABE

Câu 5. (2 điểm) Cho một bảng ô có 2012×2012 ô. Mỗi ô điền một dấu +. Thực hiện phép biến đổi : mỗi lần đổi dấu toàn bộ một hàng hoặc một cột của bảng (+ thành – và – thành +)

a) Hỏi sau một số phép biến đổi có thể thu được đúng 1 dấu – hay không ?
b) Hỏi sau một số phép biến đổi có thể thu được đúng 18 dấu – hay không ?

HƯỚNG DẪN CHẤM 10 TOÁN

Câu 1:

$$\begin{cases} 2\left(x^2+2x-y-1\right)=x^2(y+1) & (1) \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=4 & (2) \end{cases} (x, y \in R)$$

Điều kiện: $x \geq -2, y \geq -1$

Biến đổi phương trình (1) ta được $(x^2+2)(2x-y-1)=0 \Leftrightarrow y=2x-1$

Thế vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}=4$ (3)

Bình phương (3) ta có: $2\sqrt{2x(x+2)}=14-3x$ (4)

Bình phương (4) và giải ta được $x=2; y=3.$

Câu 2:

Xét trường hợp $p \neq 3$. Khi đó $(3; p)=1$ và

$p(p^2-p-1)=p(p^2-1)-p^2=p(p-1)(p+1)-p^2 \equiv 2(\text{mod}\, 3)$

Lại có nếu $r \equiv 0;1(\text{mod}\, 3)$ thì $r(2r+1) \equiv 0(\text{mod}\, 3)$; còn nếu $r \equiv 2(\text{mod}\, 3)$ thì $r(2r+1) \equiv 1(\text{mod}\, 3)$.

Như vậy không có trường hợp nào mà $r(2r+1) \equiv 2(\text{mod}\, 3)$; hay nói cách khác $p=3$.

Thay vào ta có $15=r(2r+1)$. Phương trình này không có nghiệm nguyên (loại).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn

Câu 3:

Xét đa thức $P(x)=c$ thì ta có $c=c^2 \Leftrightarrow c=0;1$

Xét $\deg P(x)=n \geq 1$. Khi đó xét bậc của $P(P(x))=[P(x)]^2$ ta được $n^2=2n \Leftrightarrow n=2$.

Suy ra $P(x)=ax^2+bx+c$

Giả sử $P(0)=P(1)=P(2)=m$. Khi đó $ax^2+bx+(c-m)=0$ có ba nghiệm $x=0;1;2$ phân biệt (mâu thuẫn).

Như vậy $P(x)\equiv 0; P(x)\equiv 1$.

Câu 4: (Tự vẽ hình)

a)

Ta có: $\widehat{AKM}=180^\circ-\widehat{AKB}$

$=180^\circ-\widehat{ADB}=\widehat{BDH}=\frac{1}{2}\widehat{BDC}$

$=\frac{1}{2}\widehat{BMC}=\frac{1}{2}(\widehat{AKM}+\widehat{KAM})$

$\Rightarrow \widehat{AKM}=\widehat{KAM}$ hay ΔAMK cân tại M

$\Rightarrow MA=MK=MC$

Vậy ΔAKC vuông tai K (ĐPCM).

b) Gọi N là trung điểm của AB

Do ΔABC cân tại A nên N nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCM và cung

$\overset{\frown}{ND}=\overset{\frown}{MD}\Rightarrow \widehat{NBD}=\widehat{MBD}$

Vậy BD là phân giác góc $\widehat{ABE}$ (1)

Theo chứng minh trên M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBMC và ΔABD.

Ta có: $\wp_{I/(O_2)}=\overline{IB}\cdot\overline{ID}=\overline{IA}\cdot\overline{IK}$ (2)

$\wp_{I/(O_1)}=\overline{IB}\cdot\overline{ID}; \wp_{I/(M)}=\overline{IA}\cdot\overline{IK}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra I thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1) và (M). Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai F của hai đường tròn này. Ta có:

$\widehat{MCF}=\widehat{MFC}=\widehat{MBC}\Rightarrow \Delta MCE\sim\Delta MBC(g\cdot g)\Rightarrow MA^2=MC^2=ME.MB$

$\Rightarrow \widehat{MAE}=\widehat{MBA}$

Mà theo chứng minh trên $\widehat{AKM}=\widehat{KAM}$ nên $\widehat{KAE}=\widehat{KAB}$ nên AK là phân giác $\widehat{BAE}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra đpcm

Câu 5:

a) Coi mỗi số trên bảng mang dấu + là 1; dấu – là -1. Như vậy ta thấy sau mỗi phép biến đổi thì tích các số trên bảng không đổi; vẫn sẽ là 1 (do ta đổi dấu đúng 2012 số).

Như vậy không thể xuất hiện trạng thái có đúng 1 dấu "-".

b) Giả sử sau một số lần biến đổi; bảng có đúng 18 dấu "-".

Gọi x_i là số lần đổi dấu ở hàng thứ i ; y_j là số lần đổi dấu ở cột thứ j.

Gọi p là số các số lẻ trong các số $x_1;x_2;...;x_{2012}$; q là các số lẻ trong các số $y_1;y_2;...;y_{2012}$.

Ta thấy rằng một ô tọa độ $(m;n)$ bất kì muốn mang dấu "-" thì hoặc x_m lẻ; y_n chẵn hoặc x_m chẵn; y_n lẻ.

Như vậy số dấu trừ trong bảng là $p(2012-q)+q(2012-p)=2012p+2012q-pq$

Bảng có đúng 18 dấu $"-" \Leftrightarrow 2012p+2012q-2pq=18$

$\Leftrightarrow 1006p+1006q-pq=9 \Leftrightarrow (p-1006)(q-1006)=1006^2-3^2=1003.1009$

$\Rightarrow (p-1006)(q-1006) \vdots 1003.1009$

Mà 1009 là số nguyên tố nên một trong hai số $p-1006;q-1006$ phải chia hết cho 1009.

Lại có: $p-1006,q-1006$ thuộc $\{-1006-1005;\ldots;1005;1006\}$

$\Rightarrow p-1006=0$ hoặc $q-1006=0,$ mẫu thuẫn với $p;q$ lẻ.