**SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG**
**Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TRƯỜNG**
**NĂM HỌC 2021-2022**
*Thời gian làm bài: 180 phút*
*Môn: Toán*

**Câu 1**. (2 điểm)

Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi $u_1=0, u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{5-u_n}(n\geq 1).$

a) Chứng minh rằng dãy $(u_n)_{n\geq 1}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Đặt $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k-3}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{5n+4}$.

**Câu 2**. (2 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$f\left(y-f\left(x\right)\right)=f\left(x^{2018}-y\right)-2017yf(x),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

**Câu 3**. (2 điểm)

Có bao nhiêu cách lát kín bảng $2\times 2022$ bởi các viên domino $1\times 2$ và $2\times 1$?

**Câu 4**. (2 điểm)

Cho tam giác nhọn $ABC$ với $AB<BC$. Cho $I$ là tâm nội tiếp của tam giác $ABC$ và $\omega$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ tiếp xúc với $BC$ tại $K$. Đường thẳng $AK$ cắt $\omega$ tại điểm thứ hai $T$. Cho $M$ là trung điểm của $BC$ và $N$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa $A$ của $\omega$. Đoạn thẳng $NT$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $BIC$ ở $P$. Chứng minh rằng

a) Cho $KI$ cắt $(BIC)$ tại điểm thứ hai $X$ thì $N;T;X$ thẳng hàng.

b) $PM \parallel AK$.

**Câu 5**. (2 điểm)

Cho dãy số $x_{n+1}=\left[a.x_n\right]\ \forall n\in\mathbb{N}$ ; $x_o\in\mathbb{N}^*$ ; $a$ là nghiệm dương của phương trình $x^2-kx-1=0$ ( $k\in\mathbb{N};k>1$) với số nguyên dương $k$ cho trước.

Khi đó chứng minh rằng $x_{n+1}\equiv x_{n-1}-1\ (\bmod k)$.

Giải

**Câu 1 :**

a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$, dãy $(u_n)_{n\ge1}$ bị chặn trên bởi 1 và là một dãy tăng.

+) Ta có $u_1 < 1$. Giả sử $u_n < 1$ $n \in \mathbb{N}^*$. Vì hàm $f(x) = \dfrac{x+3}{5-x}$ là đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên $u_n < 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1.$

Vậy $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+) Ta có $u_2 = \dfrac{3}{5} > u_1$. Giả sử $u_n > u_{n-1} \, (n \ge 2)$. Do $u_n, u_{n-1} < 1$ và $f$ là đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên $u_{n+1} = f(u_n) > f(u_{n-1}) = u_n.$

Vậy dãy $(u_n)_{n\ge1}$ tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

+) Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \, (a \le 1)$. Suy ra $a = \dfrac{a+3}{5-a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

b) Ta có $u_k - 3 = \dfrac{4(u_{k-1}-3)}{5-u_{k-1}} \Rightarrow \dfrac{1}{u_k-3} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{u_{k-1}-3} - 1\right) (k \ge 2).$

$$T_n = \frac{1}{u_1-3} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_k-3} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\left(2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{u_{k-1}-3} - n + 1\right)$$

$$= \frac{-1}{12} - \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}\left(T_n - \frac{1}{u_n-3}\right).$$

Suy ra $T_n = \dfrac{-1}{6} - \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{u_n-3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{5n+4} = \dfrac{-1}{10}.$

**Câu 2 :**

Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+)Trong (1) thay $y$ bởi $f(x)$ ta có :

$f(0) = f\left(x^{2018} - f(x)\right) - 2017(f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (2).

+)Trong (1) thay $y$ bởi $x^{2018}$ ta có :

$f\left(x^{2018} - f(x)\right) = f(0) - 2017x^{2018} f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $f(x)(f(x) + x^{2018}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (4).

Vậy nếu có $x_0$ sao cho $f(x_0) \ne 0$ thì $f(x_0) = -x_0^{2018}$. Vậy $f(0) = 0$.

Dễ thấy có hai hàm số $f_1(x) \equiv 0$ và $f_2(x) = -x^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (4).

+) Ta chứng minh nếu có hàm số $f(x)$ khác hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ mà thỏa mãn cả (1) và (4) thì vô lý.

Vì $f(x)$ khác $f_1(x)$ nên $\exists x_1 \in \mathbb{R} : f(x_1) \neq 0$. Vậy $f(x_1) = -x_1^{2018}$.

Vì $f(x)$ thỏa mãn (4) và khác $f_2(x)$ nên $\exists x_2 \in \mathbb{R} : x_2 \neq 0; f(x_2) = 0$.

+) Trong (1) cho $x = 0 \Rightarrow f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R}$.

Không mất tổng quát, giả sử $x_2 > 0$

+)Trong (1) thay $x$ bởi $x_2$ và $y$ bởi $(-x_1)$ ta có :

$$
\begin{aligned}
& f(-x_1) = f(x_2^{2018} + x_1) \\
& \Rightarrow -x_1^{2018} = f(x_1) = f(-x_1) \\
& \qquad\quad = f(x_2^{2018} + x_1) = -(x_2^{2018} + x_1)^{2018} < -x_1^{2018}.
\end{aligned}
$$

(vô lý).

+) Bằng cách thử trực tiếp vào (1) ta có kết quả hàm số cần tìm là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Câu 3:**

Gọi $a(n)$ là số cách lát.

Ta xét hai trường hợp sau:

+) Nếu hàng 2 ô đầu tiên được lát bởi viên gạch $2\times 1$ thì bảng trên trở thành $2\times(n-1)$ ; ta có $a(n-1)$ cách lát.

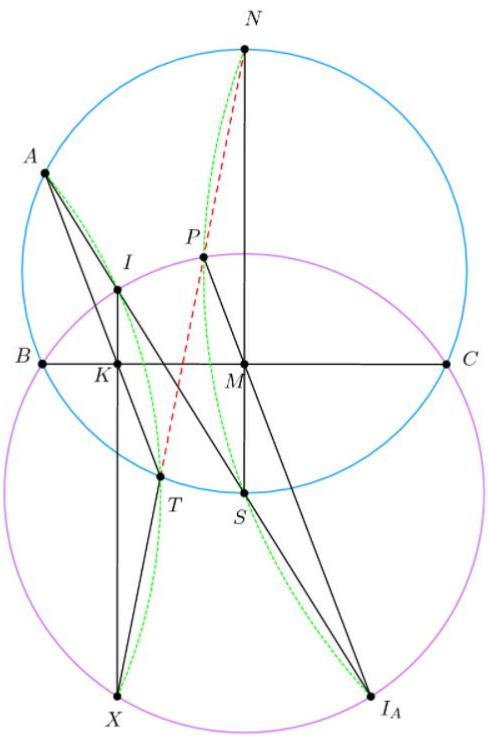
+) Nếu 4 ô vuông $2\times 2$ ở 2 hàng đầu tiên được lát bởi 2 viên gạch $1\times 2$ thì ta có $a(n)$ cách lát.

Như vậy $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$ với $a(1) = 1; a(2) = 2$.

Suy ra $a(n) = F_n$ là số Fibonacci thứ $n$.

Như vậy số cách lát là $F_{2022}$

**Câu 4:**




a) Cho $AI$ cắt $(ABC)$ tại điểm thứ hai $S$, như vậy $S$ là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa $A$.

Theo tính chất trục đẳng phương thì $AITX$ là tứ giác nội tiếp, từ đó:

$$\angle ATN = \angle ASN = \angle SIX = 180^0 - \angle XIA \overset{(AITX)}{=} 180^0 - \angle XTA$$

Và suy ra $N;T;X$ thẳng hàng

b) Đặt $P$ là $I_AM \cap (BIC)$, với $I_A = AI \cap (ABC)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc $A$. Theo tính chất trục đẳng phương $NPSI_A$ là tứ giác nội tiếp. Khi đó

$$\angle TNS = \angle TAS = \angle TXI = \angle PXI = \angle PI_AS = \angle PNS$$

Và từ đó suy ra $N;P;T$ thẳng hàng. Như vậy, $P = NT \cap (BIC)$. Suy ra $\angle PI_AS = \angle PNS = \angle TAI_A$ và $PM \parallel AK$ (đpcm).

**Câu 5:**

+) Ta có $x_{n+1} \le a.x_n < x_{n+1} + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{a} \le x_n < \frac{x_{n+1}+1}{a}.$$

+) Do $a$ là số vô tỉ nên $\frac{x_{n+1}}{a} < x_n < \frac{x_{n+1}+1}{a}$

$$\Rightarrow \ +)\ \left[\frac{x_{n+1}}{a}\right] = x_n - 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(1)}$$

$$+)\ \left\{\frac{x_{n+1}}{a}\right\} + \frac{1}{a} \geq 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(2)}$$

+) Ta có

$$x_{n+1} = [a.x_n] = \left[x_n\left(\frac{1}{a} + k\right)\right]$$

$$= \left[\frac{x_n}{a} + x_n.k\right] = \left[\frac{x_n}{a}\right] + x_n.k = x_n.k + x_{n-1} - 1$$

Như vậy $x_{n+1} = k.x_n + x_{n-1} - 1$

Suy ra $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{k}$ (đpcm).