SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ NHẤT
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: Toán 10
Lớp: 10 A1
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x=(-1)^n;n\in\mathbb{N}^*\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-4x+3\le 0\}$

Viết A dưới dạng liệt kê phần tử; B dưới dạng khoảng (đoạn). Tìm $A\cap B$; $C_{\mathbb{R}}B$.

b) Trong lớp 10A1 của trường X tất cả các học sinh đều thích ít nhất 1 trong hai môn thể thao: bóng đá và bóng rổ. Biết rằng số học sinh thích bóng đá gấp đôi số học sinh thích bóng rổ. Có 15 em thích cả hai môn và có 5 em chỉ thích bóng rổ. Tính số học sinh lớp 10A1.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

b) Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng bao nhiêu ?

Câu 3. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC có $AB=c, AC=b$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NA}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{NB}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

Câu 4. (2 điểm)

a) Cho $x>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x^2+\dfrac{1}{x^2}-6x-\dfrac{6}{x}+4$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{8x-y+5}+\sqrt{x+y-1}=3\sqrt{x}+2 \quad (1)\\ \sqrt{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8x-y+5} \quad (2)\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Câu 5. (1 điểm) Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD, $CD=2AB$. M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM=5MD$, $3BN=2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN; Q là giao điểm của BD và MN. Tính $\dfrac{PM}{PN}+\dfrac{QN}{QM}$

……………………..Hết………………………

HƯỚNG DẪN CHẤM 10A1

Câu 1:

a) Ta có $A=\{-1;1\}$.

Xét bất phương trình $x^2-4x+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 3$

Như vậy $B=[1;3]$

Ta có $A\cap B=1$; $C_{\mathbb{R}} B=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

b) Gọi tập A là tập gồm các em thích bóng đá.

B là tập các em thích bóng rổ.

Vì có 15 em thích cả 2 môn và 5 em chỉ thích bóng rổ nên số em thích bóng rổ là:

$$15+5=20$$

Vì số em thích bóng đá gấp đôi số em thích bóng rổ nên số em thích bóng đá là:

$$20.2=40$$

Theo công thức $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ ta có số học sinh lớp 10A1 là:

$$20+40-15=45$$

Câu 2:

a)

- Điều kiện: $\begin{cases} 7-x\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ -x^2+8x-7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le 7$.

$$(*)\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{(7-x)(x-1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4 \end{array}\right..$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{x+3}{x+1}=x-m$

$\Leftrightarrow x^2-mx-m-3=0 \quad (x\ne -1)$.

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2-mx-m-3=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A+x_B+x_O=3x_G$

$\Rightarrow x_A+x_B=6$

$\Leftrightarrow m=6$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy $m=6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 3:

Ta có $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=-2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Tương tự ta cũng có $3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Vậy: $AM\perp CN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$

$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow 2AB^2-3AC^2-5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow 2c^2-3b^2-\dfrac{5bc}{2}=0\Leftrightarrow 4c^2-6b^2-5bc=0\Leftrightarrow c=2b$

Câu 4:

a) Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $t\geq 2$

Khi đó $S=t^2-6t+2=(t-3)^2-7\geq -7$

Vậy $\min S=-8\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

b)

Điều kiện: $x>0,\ y\geq 0,\ 8x-y+5\geq 0,\ x+y-1\geq 0$

$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{8x-y+5}-3\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)=0.$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x-y+5-9x}{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}}+\dfrac{x+y-1-4}{\sqrt{x+y-1}+2}=0$

$\Leftrightarrow (-x-y+5)\left(\dfrac{1}{\sqrt{8x-y+5}+3\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (-x-y+5)\left(\sqrt{x+y-1}+2-\sqrt{8x-y+5}-3\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow (-x-y+5)\left(\sqrt{x+y-1}-3\sqrt{x}+2-\sqrt{8x-y+5}\right)=0$

$\Leftrightarrow (-x-y+5)\left(\dfrac{x+y-1-9x}{\sqrt{x+y-1}+3\sqrt{x}}+\dfrac{4-8x+y-5}{2+\sqrt{8x-y+5}}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (-x-y+5)(y-8x-1)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+y-1}+3\sqrt{x}}+\frac{1}{2+\sqrt{8x-y+5}}}_{>0\ \forall x,y\in TXD}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (-x-y+5)(y-8x-1)=0$$

<u>TH1</u>: $-x-y+5=0\Rightarrow y=5-x$ thay vào phương trình (2) :

$\sqrt{x(5-x)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=3\sqrt{x}\Leftrightarrow x\sqrt{5-x}+1=3x$ ĐK: $x\in(0;5]$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{5-x}-2\right)+(1-x)=0\Leftrightarrow x\frac{1-x}{\sqrt{5-x}+2}+(1-x)=0$$

$\Leftrightarrow (1-x)\left(\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{5-x}+2}+1}_{>0\ \forall x\in(0;5]}\right)=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=4$ thỏa mãn điều kiện

<u>TH 2:</u> $y-8x-1=0\Rightarrow y=8x+1$ thay vào phương trình (2) :

$$\sqrt{x(8x+1)}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\Leftrightarrow x\sqrt{8x+1}+1=2\sqrt{x}\Leftrightarrow x\sqrt{8x+1}+1-2\sqrt{x}=0$$

$$VT=x\sqrt{8x+1}+1-2\sqrt{x}>x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0\quad \forall x>0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Đáp số : hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$

Câu 5

Gọi E là giao điểm của AD và BC. Ta có A, B lần lượt là trung điểm của EC, ED.

<u>Cách 1:</u> Giả sử $\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{QN}=y\overrightarrow{QM}$.

Ta có $\overrightarrow{EP}=\dfrac{\overrightarrow{EM}-x\overrightarrow{EN}}{1-x}=\dfrac{\frac{11}{6}\overrightarrow{EA}-\frac{7x}{10}\overrightarrow{EC}}{1-x}=\dfrac{11}{6(1-x)}\overrightarrow{EA}-\dfrac{7x}{10(1-x)}\overrightarrow{EC}$

Do P, A, C thẳng hàng nên $\dfrac{11}{6(1-x)}-\dfrac{7x}{10(1-x)}=1\Leftrightarrow 55-21x=30-30x\Leftrightarrow x=-\dfrac{25}{9}$.

Vậy $\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{25}{9}$.

Ta có $\overrightarrow{EQ}=\dfrac{\overrightarrow{EN}-y\overrightarrow{EM}}{1-y}=\dfrac{\frac{7}{5}\overrightarrow{EB}-\frac{11y}{12}\overrightarrow{ED}}{1-y}=\dfrac{7}{5(1-y)}\overrightarrow{EB}-\dfrac{11y}{12(1-y)}\overrightarrow{ED}$

Do Q, B, D thẳng hàng nên $\dfrac{7}{5(1-y)}-\dfrac{11y}{12(1-y)}=1\Leftrightarrow 84-55y=60-60y\Leftrightarrow y=-\dfrac{24}{5}$.

Vậy $\frac{QN}{QM}=\frac{24}{5}$.

Suy ra $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{341}{45}$.

<u>Cách 2:</u> Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EMN có $A;P;C$ thẳng hàng ta có:

$$\frac{AE}{AM}\cdot\frac{PM}{PN}\cdot\frac{CN}{CE}=1$$

$$\Rightarrow\frac{6}{5}\cdot\frac{PM}{PN}\cdot\frac{3}{10}=1$$

Suy ra $\frac{PM}{PN}=\frac{25}{9}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EMN có $B;Q;D$ thẳng hàng ta có:

$$\frac{DM}{DE}\cdot\frac{QN}{QM}\cdot\frac{BE}{BN}=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{12}\cdot\frac{QN}{QM}\cdot\frac{5}{2}=1$$

Suy ra $\frac{QN}{QM}=\frac{24}{5}$; suy ra $\frac{PM}{PN}+\frac{QN}{QM}=\frac{341}{45}$.