SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI THÁNG LẦN 1 NĂM HỌC 2021 - 2022

MÔN TOÁN – 10

Thời gian làm bài : 180 Phút

(Đề có 1 trang)

Câu 1. (2,0 điểm) Tìm m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^2-6x+m-6}{x^2+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2

Câu 2. (2,0 điểm) Cho dãy số Fibonacci (F_n) thỏa mãn $F_1=F_2=1$ và $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \forall n\ge 1$.
Chứng minh $2^{n-1}F_n-n$ chia hết cho 5 với mọi $n\ge 1$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Cho hình bình hành ABCD tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho:

$$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0} \text{ (1) và } \overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \text{ (2)}$$

Chứng minh rằng: I, J, O thẳng hàng.

2) Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,F trên các cạnh BC,CA,AB thỏa mãn:
$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{AF}{BF}$. Chứng minh

a) Hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm

b) Nếu hai tam giác ABC và DEF chung trực tâm thì tam giác ABC đều.

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf(x)+(f(y))^2 \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 5. (1,0 điểm) Một lễ hội có n chú hề tới góp vui. Biết rằng mỗi chú hề đều chọn được ít nhất 5 màu từ 8 màu có sẵn để vẽ lên trang phục và mặt của mình sao cho không có 2 chú hề nào sử dụng các màu giống hệt nhau và 1 màu có không quá 10 chú hề sử dụng. Chứng minh rằng $n\le 16$ và hãy chỉ ra 1 cách tô màu cho đúng 16 chú hề thỏa mãn các điều kiện trên.

ĐÁP ÁN THI THÁNG LẦN 1 LỚP 10 TOÁN NĂM HỌC 2021-2022

Câu 1. (2,0 điểm) Tìm m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx^2-6x+m-6}{x^2+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2

Lời giải:

$$\min y=2\leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{mx^2-6x+m-6}{x^2+2}\ge 2\forall x\ \ (1)\\ \exists x_0:\dfrac{mx_0^2-6x_0+m-6}{x_0^2+2}=2\ \ (2)\end{cases}$$

$(1)\leftrightarrow f(x)=(m-2)x^2-6x+m-10\ge 0\forall x$

$(2)\leftrightarrow$ phương trình $(m-2)x^2-6x+m-10=0$ có nghiệm.

$m=2$ rõ ràng không thỏa mãn

$m\ne 2$ thì hai điều trên tương đương với $\Delta_f=0$ hay $m=11$ hoặc $m=1$

Đáp số: $m=11$ hoặc $m=1$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho dãy số Fibonacci (F_n) thỏa mãn $F_1=F_2=1$ và $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\forall n\ge 1$. Chứng minh $2^{n-1}F_n-n$ chia hết cho 5 với mọi $n\ge 1$

Lời giải:

Chứng minh bằng truy hồi

Bước cơ sở với $F_1.F_2$ đơn giản

Giả sử $n\ge 2$ và kết quả đúng với mọi $k=1,2\ldots,n$.

Xét $2^n.F_{n+1}-(n+1)=2(2^{n-1}F_n-n)+4(2^{n-2}F_{n-1}-(n-1))+5n-5$

Từ đó do $2^{n-1}F_n-n$ và $2^{n-2}F_{n-1}-(n-1)$ chia hết cho 5, ta có $2^n.F_{n+1}-(n+1)$ chia hết cho 5.

Theo nguyên lý quy nạp, có điều phải chứng minh

Câu 3. (3,0 điểm) 1) Cho hình bình hành ABCD tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho:

$$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}\ (1)\ \text{ và }\ \overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\ (2)$$

Chứng minh rằng: I, J, O thẳng hàng.

2) Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,F trên các cạnh BC,CA,AB thỏa mãn: $\frac{BD}{CD}=\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}$.

Chứng minh

a) Hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm

b) Nếu hai tam giác ABC và DEF chung trực tâm thì tam giác ABC đều.

Lời giải:

1) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})-2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OI}+3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OI}+3\overrightarrow{OA}+2(-\overrightarrow{OA})-2(-\overrightarrow{OB})=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$$

$$(2)\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+2(-\overrightarrow{OA})=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OJ}=-\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$$

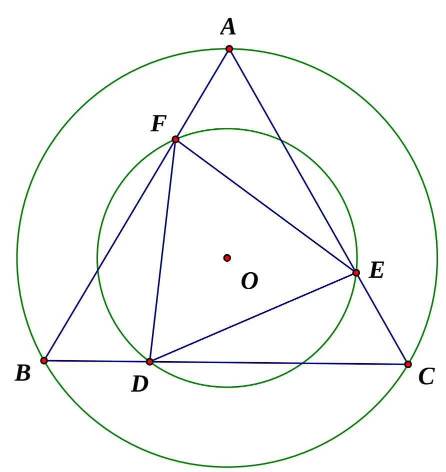
Từ (3) và (4) suy ra: $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}\Leftrightarrow I,J,O$ thẳng hàng

2) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\left(\frac{BD}{BC}\overrightarrow{GC}+\frac{CD}{CB}\overrightarrow{GB}\right)+\left(\frac{CE}{CA}\overrightarrow{GA}+\frac{AE}{AC}\overrightarrow{GC}\right)+\left(\frac{AF}{AB}\overrightarrow{GB}+\frac{BF}{BA}\overrightarrow{GA}\right)$

$=\left(\frac{BD}{BC}+\frac{AE}{AC}\right)\overrightarrow{GC}+\left(\frac{CD}{CB}+\frac{AF}{AB}\right)\overrightarrow{GB}+\left(\frac{CE}{CA}+\frac{BF}{BA}\right)\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Suy ra G là trọng tâm tam giác DEF



Lại có hai tam giác ABC và DEF có chung trực tâm nên dựa vào tính chất của đường thẳng Euler suy ra hai tam giác cũng có chung tâm đường tròn ngoại tiếp O.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Do $OD = OE$ nên $OD^2 - R^2 = OE^2 - R^2$

Suy ra $DB.DC = EC.EA$. Mà $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EC}{EA}$ nên $DC^2 = EA^2$

Chứng minh tương tự ta thu được $DC = EA = FB$. Từ đó $BC = CA = AB$ hay tam giác ABC đều.

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:
$f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2 \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$

Nếu $f(0) = 0$: Cho $\begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ta được: $f\left(x^2\right) = x^2 \Rightarrow f(t) = t \forall t \geq 0$

Cho $x = y \in \mathbb{R}$ ta được: $f(0) = x^2 - 2xf(x) + (f(x))^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ với mọi x. Thử lại thấy đúng.

Nếu $f(0) = 1$: Cho $\begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ta được: $f\left(x^2\right) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(t) = t + 1 \forall t \geq 0$.

Cho $x = 0; y \in \mathbb{R}$ ta được: $f\left(y^2\right) = -2y + (f(y))^2 \Rightarrow (f(y))^2 = f\left(y^2\right) + 2y$

$= y^2 + 1 + 2y = (y+1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(y) = y + 1 \\ f(y) = -y - 1 \end{array}\right.$ với mọi y

Giả sử $\exists y_o \in R$ sao cho: $f\left(y_o\right) = -y_o - 1$. Chọn $x = y = y_o$ ta được:

$1 = y_o^2 - 2y_o f\left(y_o\right) + \left(f\left(y_o\right)\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(y_o\right) = y_o - 1 \\ f\left(y_o\right) = y_o + 1 \end{array}\right.$

Nếu $f\left(y_o\right) = y_o - 1 \Rightarrow -y_o - 1 = y_o - 1 \Rightarrow y_o = 0$ và $f(0) = -1$ (loai).

Nếu $f\left(y_o\right) = y_o + 1 \Rightarrow -y_o - 1 = y_o + 1 \Rightarrow y_o = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$.

Thỏa mãn: $f\left(y_o\right) = y_o + 1$. Vậy $f(y) = y + 1 \forall y \in R$. Thử lại thấy đúng.

Câu 5. (1,0 điểm) Một lễ hội có n chú hề tới góp vui. Biết rằng mỗi chú hề đều chọn được ít nhất 5 màu từ 8 màu có sẵn để vẽ lên trang phục và mặt của mình sao cho không có 2 chú hề nào sử dụng các màu giống hệt nhau và 1 màu có không quá 10 chú hề sử dụng. Chứng minh rằng $n \le 16$ và hãy chỉ ra 1 cách tô màu cho đúng 16 chú hề thỏa mãn các điều kiện trên.

Lời giải:

Ta đếm số T các cặp (H, m) với H là chú hề nào đó và m là màu mà chú hề đó sử dụng.

Cách 1.

GĐ 1. Chọn chú hề: Có n cách

GĐ 2. Chọn màu mà chú hề đó dùng: ≥ 5

Vậy $T \ge 5n$

Cách 2.

GĐ 1. Chọn màu mà chú hề dùng: 8 cách

GĐ 2. Chọn chú hề dùng màu đó: ≤ 10

Vậy $T \le 8.10$

Từ các điều trên ta có: $5n \le 80$, suy ra $n \le 16$

Dấu bằng xảy ra khi mỗi chú hề dùng đúng 5 màu và 1 màu có đúng 10 chú hề sử dụng

Ta minh họa 1 trường hợp xảy ra dấu bằng trong bảng sau: (dấu x chỉ màu mà chú hề tương ứng sử dụng)

	m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8
H1	x	x	x	x	x			
H2		x	x	x	x	x		
H3			x	x	x	x	x	
H4				x	x	x	x	x
H5	x				x	x	x	x
H6	x	x				x	x	x
H7	x	x	x				x	x
H8	x	x	x	x				x
H9	x	x	x	x		x		
H10		x	x	x	x		x	
H11			x	x	x	x		x
H12	x			x	x	x	x	
H13		x			x	x	x	x
H14	x		x			x	x	x
H15	x	x		x			x	x
H16	x	x	x		x			x