SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ NĂM
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: Toán 10
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = mx^2 + (m-2)x + 3$.

a) Tìm m để $y = f(x)$ là hàm chẵn.

b) Tìm m để $y = f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình $2\left(x+1\right)\sqrt{3x+1}+8\sqrt{x+4} = x^2+7x+18$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2+2xy+1=4x \\ x(x+2y)^2 = 8y^2+7x+2 \end{cases}$

Câu 3. (2 điểm)

a) Tìm số nguyên dương $n, n > 4$ biết: $2.C_n^0 + 5.C_n^1 + 8.C_n^2 + \ldots + (3n+2)\cdot C_n^n = 1600$.

b) Cho ba số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x+y+z \le \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{z\left(xy+1\right)^2}{y^2\left(yz+1\right)} + \frac{x\left(yz+1\right)^2}{z^2\left(zx+1\right)} + \frac{y\left(zx+1\right)^2}{x^2\left(xy+1\right)}.$$

Câu 4. (3 điểm)

a) Cho tam giác ABC có $AB= c$,$BC=a$,$CA=b$ .Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL và $\dfrac{CM}{AL} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Tính $.\dfrac{b}{c}$. và $\cos A$.

b) Cho tam giác ABC không vuông với độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh B, C lần lượt là h_b, h_c, độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A là m_a . Tính $\cos A$, biết $h_b = 8, h_c = 6, m_a = 5.$

Câu 5. (1 điểm) Cho đa giác lồi n đỉnh. Ta nối tất cả các đường chéo. Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy bên trong của đa giác đã cho. Tính số miền đa giác được tạo thành bên trong của đa giác lồi đó (ta chỉ tính các đa giác mà bên trong nó không có điểm nào thuộc đường chéo của đa giác ban đầu)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

a) Vì tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm chẵn $\Leftrightarrow f(x)=f(-x)\forall x\in\mathbb{R}$

Hay $mx^2+(m-2)x+3=m(-x)^2+(m-2)(-x)+3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (m-2)x=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m=2$

b) Vì $y=f(x)$ là hàm số bậc hai nên để $f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ thì trước hết $m>0$.

Khi đó, hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{-(m-2)}{2m};+\infty\right)$.

Như vậy để $f(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ thì $(2;+\infty)\subset\left(\dfrac{-(m-2)}{2m};+\infty\right)$; hay

$$\frac{-(m-2)}{2m}\le 2 \Leftrightarrow -m+2\le 4m \Leftrightarrow \frac{2}{5}\le m \ \ (m>0)$$

Câu 2:

a)

Đk: $x\ge -\dfrac{1}{3}$

Pt: $2(x+1)\sqrt{3x+1}+8\sqrt{x+4}=x^2+7x+18$

$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{3x+1}+8\sqrt{x+4}=(3x+1)+(x^2+2x+1)+2x+16$

$\Leftrightarrow (3x+1)-2(x+1)\sqrt{3x+1}+(x+1)^2+2\left(x+4-4\sqrt{x+4}+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-x-1\right)^2+2\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2=0$

$\begin{cases}\sqrt{3x+1}-x-1=0\\ \sqrt{x+4}-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x+1}=x+1\\ x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=0$

Vậy pt có nghiệm x=0

b)

Dễ thấy $x \neq 0$, ta có: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2xy + 1 = 4x \\ x(x+2y)^2 = 8y^2 + 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4y^2+1}{x} + x + 2y = 4 \\ (x+2y)^2 - 2\dfrac{4y^2+1}{x} = 7 \end{cases}$.

Đặt $u = \dfrac{4y^2+1}{x}, v = x + 2y$ ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 3, u = 1 \\ v = -5, u = 9 \end{array} \right.$

+) Với $v = 3, u = 1$ ta có hệ: $\begin{cases} 4y^2 + 1 = x \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 1 = x \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2y - 2 = 0 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5,\ y = -1 \\ x = 2,\ y = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

+) Với $v = -5, u = 9$ ta có hệ: $\begin{cases} 4y^2 + 1 = 9x \\ x + 2y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 1 = 9x \\ x = -5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 18y + 46 = 0 \\ x = -5 - 2y \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

Câu 3:

a) Số hạng tổng quát của tổng ở vế trái là: $(3k+2)C_n^k = 3k \cdot C_n^k + 2.C_n^k, (0 \le k \le n)$.

Đặt $P = 2 \cdot C_n^0 + 5.C_n^1 + 8.C_n^2 + \ldots + (3n+2) \cdot C_n^n$, ta có: $P = 3\left(C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3.C_n^3 + \ldots + n.C_n^n\right) +$

$2\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right)$

Mặt khác ta có:

$1C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3.C_n^3 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}; C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Do đó $P = 3n \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^n = (3n+4)2^{n-1}$.

Từ yêu cầu bài toán ta suy ra: $(3n+4)2^{n-1} = 1600 = 25.2^6$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3n+4) \cdot 2^{n-1} = 25.2^6 \\ n \in N, n > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n + 4 = 25 \\ n - 1 = 6 \\ n \in N, n > 4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7$

Vậy $n = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Biến đổi biểu thức P, ta có:

$$P = \frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}{y + \frac{1}{z}} + \frac{\left(y + \frac{1}{z}\right)^2}{z + \frac{1}{x}} + \frac{\left(z + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{y}}$$

Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \ge a + b + c (a, b, c > 0)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a, \frac{b^2}{c}+c\ge 2b, \frac{c^2}{a}+a\ge 2c \Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Sử dụng (1) ta suy ra: $P\ge\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{x}\right)=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=Q$

Tiếp tục đánh giá Q, ta có: $Q\ge 3\sqrt[3]{xyz}+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$, ta có: $0<t=\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}\le\frac{1}{2}$

Khi đó: $Q\ge 3t+\frac{3}{t}=12t+\frac{3}{t}-9t\ge 2\sqrt{36}-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Câu 4: (Tự vẽ hình)

a)

Ta có: $\overrightarrow{AL}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}}{2}$

Theo giả thiết: $AL\perp CM\Leftrightarrow\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{CM}=0$

$\Leftrightarrow\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow bc^2+bc^2\cos A-2cb^2\cos A-2cb^2=0$

$\Leftrightarrow(c-2b)(1+\cos A)=0\Rightarrow c=2b\ (do\cos A>-1)$

Khi đó: $CM^2=\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}=\frac{a^2-b^2}{2}$

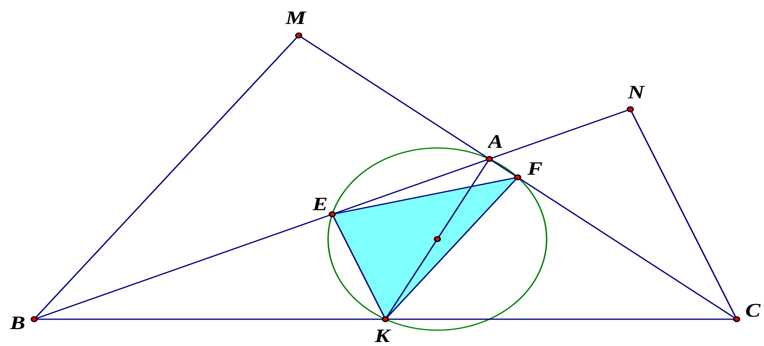
$AL^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\left(AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{9}\left(9b^2-a^2\right)$

$\frac{CM}{AL}=\frac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{CM^2}{AL^2}=\frac{9}{4}.\frac{a^2-b^2}{9b^2-a^2}=\frac{9}{4}\left(5-2\sqrt{5}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{9b^2-a^2}=5-2\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}=6-\sqrt{5}$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5b^2-a^2}{4b^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

b)



Vẽ đường cao *BM* và *CN* của tam giác *ABC* ($M \in AC, N \in AB$). Gọi *K* là trung điểm của *BC*, qua *K* kẻ đường thẳng song song với *CN* và *BM* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *E* và *F*. Khi đó *E* là trung điểm *BN* và *F* là trung điểm *CM*.

Bốn điểm A, E, K, F nằm trên đường tròn đường kính $AK = 5$, theo định lý sin trong tam giác *EKF* ta được $EF = AK.\sin\angle EKF = 5\sin A$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác *EKF* ta được :

$$EF^2 = KE^2 + KF^2 - 2KE.KF.\cos\hat{E}KF = 3^2 + 4^2 + 2.3.4.\cos A$$

$$\Leftrightarrow 25\sin^2 A = 25 + 24.\cos A \Leftrightarrow 25\left(1-\cos^2 A\right) = 25 + 24.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = -\frac{24}{25} \text{ (vì } \cos A \neq 0).$$

Câu 5:

Gọi $a_3; a_4; ...; a_m$ lần lượt là số miền tam giác; tứ giác; ngũ giác;…; m- giác được tạo thành.

Ta cần tính $S = a_1 + a_2 + ... + a_m$

+) Trước hết; ta đếm tổng tất cả các đỉnh của các miền đa giác.

Ta thấy ngay tổng này bằng $A = 3a_3 + 4a_4 + ... + m.a_m$.

Hơn nữa; nếu đếm như vậy thì mỗi giao điểm của 2 đường chéo sẽ được tính 4 lần (do giao điểm đó thuộc 4 miền). Mỗi đỉnh của đa giác ban đầu sẽ được đếm $n-2$ lần (do thuộc $n-2$ miền)

Như vậy, $A = 3a_3 + 4a_4 + ... + m.a_m = 4.C_n^4 + n(n-2)$ (1)

+) Tiếp theo, ta đếm tổng tất cả các góc trong các miền của đa giác.

Ta có tổng này bằng $B=180^0.a_3+180^0.2.a_4+180^0.3.a_5+...+180^0.(m-2)a_m$

Mặt khác, tổng các góc trên chính là tổng các góc của đa giác ban đầu ($180^0.(n-2)$) cộng với 360^0 nhân tổng các giao điểm của các đường chéo.

Như vậy, $B=180^0.a_3+180^0.2.a_4+180^0.3.a_5+...+180^0.(m-2)a_m=180^0(n-2)+360^0.C_n^4$

Suy ra $a_3+2a_4+...+(m-2).a_m=2.C_n^4+(n-2)$ (2)

Từ $(1);(2)$ suy ra $S=1+C_n^4+\frac{1}{2}n(n-3)$.