SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN I- KHỐI 11
NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (3,0 điểm)

a) Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^2}dx$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 2: (1,0 điểm) Cho số dương k > 0. Dãy (a_n) thỏa mãn $a_0 > 0$ và $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1+ka_{n-1}^2}}, \forall n \geq 1$.

Tính giới hạn $lim_{n\to+\infty} a_n.\sqrt{n}$.

Câu 3: **(2,0 điểm)** Cho tam giác ABC nhọn. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Các tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD tương ứng cắt cạnh AC, AB tại E và F. BE cắt CF tại G.

a) Chứng minh rằng: AEDF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $\angle GDF = \angle ADE$.

Câu 4: (2,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m,n) thỏa mãn $mn-1 | n^3-1$.

Câu 5: (2, 0 điểm) Có $a+b$ cái rổ xếp thành một hàng, được đánh số từ 1 đến $a+b$, trong đó a, b là hai số nguyên dương cho trước. Ban đầu, trong a rổ đầu tiên, mỗi cái rổ có một quả táo, và trong b rổ cuối cùng, mỗi cái rổ có một quả lê. Mỗi bước, được quyền chuyển một quả táo từ rổ i sang rổ $i+1$ và một quả lê từ rổ j sang $j-1$ miễn là hiệu $i-j$ là một số chẵn. Ngoài ra, một cái rổ có thể chứa nhiều quả một lúc. Mục đích là đạt được cấu hình mà trong b rổ đầu tiên, mỗi rổ có một quả lê và trong a rổ cuối cùng, mỗi rổ có một quả táo. Chứng minh rằng có thể thực hiện được điều đó khi và chỉ khi ab là một số chẵn.

Hướng dẫn chấm

Câu 1.

a) Ta có:

$$\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{2x+1}{(2x+1)^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.ln|2x+1|\Big|_0^1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2x+1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}.ln3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}ln3 - \frac{1}{6}$$

b) Tìm tất cả các giá trị thự c của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Có : $y' = 4x^3 - 4x(m+1) = 4x(x^2 - (m+1))$

Để hàm số có 3 cực trị => Phương trình bậc ba y' = 0 có đúng 3 nghiệm => (m+1) > 0

Khi đó: các điểm cực trị là : $x = 0, x = -\sqrt{m+1}, x = \sqrt{m+1}$

Và đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là A, B, C thỏa mãn:

Khi x = 0 => y = m^2 => A(0; m^2)

Khi $x = -\sqrt{m+1}$ => $y = -2m-1$ => B($-\sqrt{m+1}; -2m-1$)

Khi x = $\sqrt{m+1}$ => $y = -2m-1$ => C($\sqrt{m+1}; -2m-1$)

=> ABC cân tại A

Để ABC vuông cân tại A ⬄ BC = 2AM.

BC cắt Oy tại M => AM =$|m^2+2m+1|$ = m^2+2m+1

BC = $BM + CM$ = $2\sqrt{m+1}$.

Do đó: BC = 2AM <=> $2(m+1)^2 = 2\sqrt{m+1}$

=> $(m+1)^2 = \sqrt{m+1}$. Chú ý: m + 1 > 0

=> $(m+1)\sqrt{m+1} = 1$ ⬄ $\left(\sqrt{m+1}\right)^3 = 1$ => $\sqrt{m+1} = 1$ => $m = 0$. Vậy m = 0

Câu 2: Cho số dương k > 0 và dãy (a_n) thỏa mãn: $a_0 > 0$; $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{\sqrt{1+ka_{n-1}^2}}, \forall n > 0$

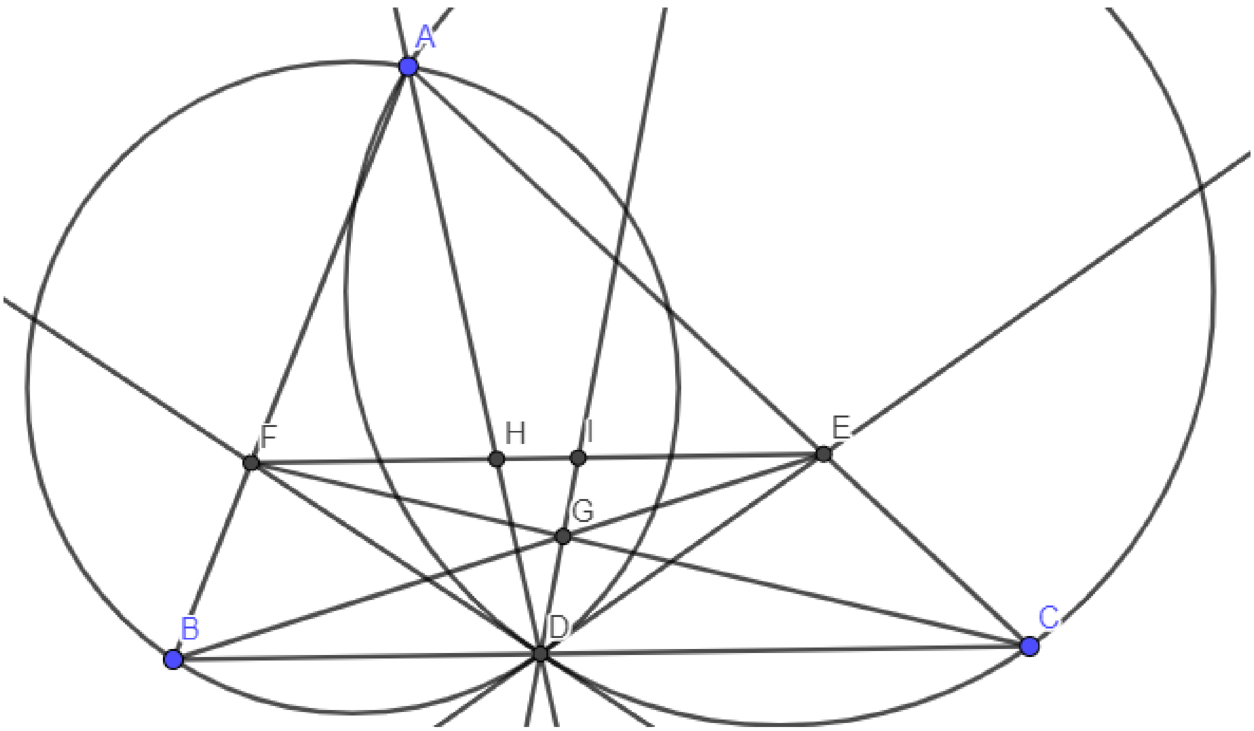
Tính giới hạn $lim_{n\to+\infty} a_n.\sqrt{n}$

Có: $a_n^2 = \dfrac{a_{n-1}^2}{1+k.a_{n-1}^2}$ => $ka_n^2a_{n-1}^2 = a_{n-1}^2 - a_n^2$ => $k = \dfrac{1}{a_n^2} - \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$

Làm tương tự, ta được: $\dfrac{1}{a_n^2} = \dfrac{1}{a_{n-1}^2} + k = \dfrac{1}{a_0^2} + kn$

=> $\dfrac{1}{a_n^2.n} = \dfrac{1}{n.a_0^2} + k \to k$ => $a_n\sqrt{n} \to \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

Câu 3: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Các tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD tương ứng cắt cạnh AC, AB tại E và F. BE cắt CF tại G. CMR: $\angle GDF = \angle ADE$.



Có: $\angle ADF = \angle ABC, \angle ADE = \angle ABC$ => $\angle EDF + \angle BAC = 180^0$

=> AEDF là tứ giác nội tiếp => $\angle AEF = \angle ADF = \angle ACB$ => EF // BC.

Vì AD là phân giác góc A và AEFD là tứ giác nội tiếp => DE = DF.

AD và DG cắt EF tại H và I.

Để chứng minh $\angle GDF = \angle ADE$ ta chứng minh FI = HE

Do EF // BC => $\dfrac{HE}{HF} = \dfrac{CD}{BD}$ và $\dfrac{IF}{IE} = \dfrac{CD}{BD}$ => $\dfrac{HE}{HF} = \dfrac{IF}{IE}$

=> $\dfrac{HE}{EF}=\dfrac{IF}{EF}$ => HE = IF => tam giác DFI = DEH (c.g.c) => $\angle GDF=\angle ADE$

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m,n) thỏa mãn $mn-1|\ n^3-1$.

Lời giải:

Trước tiên ta nhận xét được rằng $(1,n)$ và $(m,1)$ với $m,n\in\mathbb{N}^*$ là các cặp thỏa mãn bài toán.

Ta xét các cặp (m,n) với $m,n>1.$ Ta thấy rằng:

$mn-1\left|n^3-1\Rightarrow mn-1\right|m\left(n^3-1\right)=(mn-1)n^2+\left(n^2-m\right)$

do đó $mn-1\left|n^2-m\Rightarrow mn-1\right|m\left(n^2-m\right)=(mn-1)n+\left(n-m^2\right)$.

dẫn đến $mn-1\left|n-m^2\Rightarrow mn-1\right|m\left(n-m^2\right)=(mn-1)+\left(1-m^3\right)$.

Như vậy ta được $mn-1|\ m^3-1$.

Vì $n>1$ và $mn-1|\ n^3-1$ nên $mn-1\le n^3-1$ hay $m\le n^2$. Hoàn toàn tương tự, vì $mn-1|\ m^3-1$ nên ta cũng được $n\le m^2$.

Giả sử rằng $m<n^2$ và $n<m^2$ thì từ $\begin{cases}mn-1|\ n^2-m\\ mn-1|\ m^2-n\end{cases}$ ta được: $\begin{cases}mn\le n^2-m+1<n^2\\ mn\le m^2-n+1<m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<n\\ n<m\end{cases}$.

Mâu thuẫn trên dẫn đến $m=n^2$ hoặc $n=m^2$. Ngược lại, ta kiểm tra được rằng với (m,n) với $m,n>1$ thỏa mãn $m=n^2$ hoặc $n=m^2$ thì $mn-1|\ n^3-1$.

Tóm lại, các cặp (m,n) thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l}(1,n);(m,1)\forall m,n\in\mathbb{N}^*\\ \left(n^2,n\right);\left(m,m^2\right)\forall m,n\in\mathbb{N},m,n>1\end{array}\right.$.

Bài 5. Có $a+b$ cái rổ xếp thành một hàng, được đánh số từ 1 đến $a+b$, trong đó a, b là hai số nguyên dương cho trước. Ban đầu, trong a rổ đầu tiên, mỗi cái rổ có một quả táo, và trong b rổ cuối cùng, mỗi cái rổ có một quả lê. Mỗi bước, được quyền chuyển một quả táo từ rổ i sang rổ $i+1$ và một quả lê từ rổ j sang $j-1$ miễn là hiệu $i-j$ là một số chẵn. Ngoài ra, một cái rổ có thể chứa nhiều quả một lúc. Mục đích là đạt được cấu hình mà trong b rổ đầu tiên, mỗi rổ có một quả lê và trong a rổ cuối cùng, mỗi rổ có một quả táo. Chứng minh rằng có thể thực hiện được điều đó khi và chỉ khi ab là một số chẵn.

Lời giải: Nhận xét: nếu i – j chẵn thì ta có thể đổi chỗ quả táo từ rổ i và quả lê từ rổ j bằng cách thực hiện liên tiếp các bước dịch chuyển.

Trước hết, ta hãy chỉ ra rằng nếu ab là một số chẵn thì ta có thể đat được mục đích. Ta suy luận bằng quy nạp theo $a+b$.

- Nếu $\min(a,b)=0$ thì ta không có gì phải chứng minh.

- Nếu $\min(a,b)=1$, chẳng hạn $a=1$ thì b là số chẳn. Khi đó, ta chỉ cần thực hiện việc đổi chỗ cho quả táo duy nhất (nằm ờ rổ ngoài cùng bên trái) và quả lê ở rổ ngoài cùng bên phải (và không thay đổi vị trí các quã lē còn lại) là xong.

- Giả sư $\min(a,b)\geq 2$ và $a+b$ là lẻ. Thế thì chúng ta đổi chỗ quả táo ở rổ ngoài cùng bên trái và quả lê ngoài cùng bên phải (và không thay đổi vị trí của các quả táo và lê còn lại) cho đến khi chúng đươc tráo vị trí cho nhau. Đến thời điểm đó, bằng cách tạm quên hai quả này, ta quy về trường hơp có $a-1$ quả táo và $b-1$ quả lê và sử dụng giả thiết quy nạp để kết thúc.

- Giả sử $\min(a,b)\geq 2$ và $a+b$ là chẵn, như vậy a, b là các số chẵn. Thế thì, ta có thể đổi chỗ quả táo ở rồ 1 và quả lê ở rổ $a+b-1$ (và không thay đổi các vị trí của các quả táo, lê còn lại). Sau đó, hoàn toàn tương tự, ta có thể đổi chỗ của quả táo ở rổ 2 và quả lê ở rồ $a+b$. Bây giờ, tạm thời quên hai quả táo và hai quả lê ở các rổ $1,2,a+b-1,a+b$, ta quy về trường hợp có $a-2$ quả táo và $b-2$ quả lê và sử dụng giả thiết quy nạp để kết thúc.

Để kết thúc chứng minh, ta sẽ chỉ ra rằng không thể đạt được cấu hình mong muốn nếu ab là lẻ, nghĩa là khi a, b là các số lẻ. Gọi X là số các quả táo nằm trong các rổ được đánh số lẻ và gọi Y là số các quả lê nằm trong các rổ được đánh số lẻ. Nhận xét rằng $X-Y$ không đổi sau mỗi bước. Thế nhưng, nếu a, b là các số lẻ thì ban đầu có $X=\frac{1}{2}(a+1)$ và $Y=\frac{1}{2}(b-1)$ và

$X-Y=\frac{a-b+2}{2}$; còn với cấu hình mong muốn thì $X=\frac{1}{2}(a-1)$ và $Y=\frac{1}{2}(b+1)$ và

$X-Y=\frac{a-b-2}{2}$, mâu thuẫn.