**TrườngTHPT chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương**

**ĐỀ THI THÁNG LẦN 2 NĂM HỌC 2021-2022**

**Môn TOÁN – Lớp 11**

Ngày thi: 08/11/2021 *Thời gian **180 phút**.*

**Câu 1. (2,0 điểm)** Cho hàm số $y=2x^3-3(2m-1)x^2+6\left(m^2-m\right)x+2m(m-1)(C)$. Tìm $m$ sao cho đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1

**Câu 2. ( 2,0 điểm)** Giải hê phuơng trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2+1} \\ y+\sqrt{x^3+x-1}=\sqrt[3]{3x^2+2x+3} \end{cases}$

**Câu 3. (2,0 điểm)** Cho dãy số $(a_n)$ thỏa mãn: $a_0=1, a_{n+1}=\dfrac{1}{1+2a_n}, n\geqslant 0$. Tìm $\lim a_n$

**Câu 4. (3,0 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và các đường cao AD,BE,CF. Gọi AD cắt (O) tại K, KF cắt lại đường tròn (O) tại L.

a) Chứng minh CL đi qua trung điểm EF
b) Đường thẳng qua A và vuông góc CO cắt CL tại N. Chứng minh FN vuông góc với FO

**Câu 5. (1,0 điểm)** Cho $S$ là tập hợp có n phần tử và k là số nguyên thỏa mãn $0\le k\le 2^n$.

Chứng minh có thể tô màu mọi tập con của $S$ bởi hai màu xanh đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

(a) Hợp 2 tập đỏ là đỏ.

(b) Hợp 2 tập xanh là xanh.

(c) Có đúng $k$ tập đỏ.

## ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 2 LỚP 11 TOÁN NĂM HỌC 2021-2022

**Câu 1. (2,0 điểm)** Cho hàm số $y=2x^3-3(2m-1)x^2+6\left(m^2-m\right)x+2m(m-1)(C)$.

Tìm $m$ sao cho đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1

**Lời giải:**

Đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị nằm về 2 phía trục Ox.

Nhận xét $y'=6x^2-6(2m-1)x+6\left(m^2-m\right)$ là tam thức bậc 2 luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1=m,x_2=m-1$ nên đồ thị hàm số đã cho luôn có cực đại, cực tiểu $A\left(m,m\left(2m^2-m-2\right)\right)$ và $B\left(m-1,(m-1)\left(2m^2+m-1\right)\right)$

Vậy $y\left(x_1\right)\cdot y\left(x_2\right)<0\Leftrightarrow m\left(2m^2-m-2\right)(m-1)(m+1)(2m-1)<0$ (*)

Mặt khác, hoành độ ba giao điểm lớn hơn 1 khi và chỉ khi $x_1,x_2>1$ và $y(1)<0$ hay $m>1,8m^2-14m+5<0$ hay $1<m<\frac{5}{4}$

Kết hợp với điều kiện (*) ta thấy không tồn tại $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 2. ( 2,0 điểm)**

Giải hê phuong trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2+1} \\ y+\sqrt{x^3+x-1}=\sqrt[3]{3x^2+2x+3} \end{cases}$

**Lời giải:**

Trước hết đặt $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ thì $g'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0\forall x\in\mathbb{R}$ nên g(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $(1)\leftrightarrow x=y$.

Ta được: $x+\sqrt{x^3+x-1}=\sqrt[3]{3x^2+2x+3}$

Đặt $u=\sqrt{x^3+x-1}$ thì $(x+u)^3=3x^2+2x+3=\left(x^3+3x^2+3x+1\right)-\left(x^3+x-1\right)+1$

Hay $(x+u)^3+u^2=(x+1)^3+1$

Đặt $f(t)=(x+t)^3+t^2$ thì $f'(t)=3(x+t)^2+2t\geq 0\forall t\geq 0$ và $f'(t)=0$ tại hữu hạn điểm nên f(t) đồng biến trên $(0,+\infty)$

Do $u,1\in(0,+\infty)$ nên $f(u)=f(1)\leftrightarrow u=1$

Ta được $x^3+x-1=1\leftrightarrow x=1$

Đáp số: $(x,y)=(1;1)$

**Câu 3. (2,0 điểm)** Cho dãy số $(a_n)$ thỏa mãn: $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{1+2a_n}, n \geqslant 0$. Tìm $\lim a_n$

**Lời giải:**

Đặt $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ thì $f\left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = \dfrac{1+\dfrac{1}{1+2x}}{-1+2\cdot\dfrac{1}{1+2x}} = \dfrac{1+2x+1}{-1-2x+2} = -2\cdot\dfrac{x+1}{2x-1}$

Vậy ta có $f(a_{n+1}) = -2f(a_n), n \geqslant 0$

Suy ra $f(a_n) = (-2)^n f(a_0) = (-2)^{n+1}$ và $a_n = \dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}$

Vậy $\lim a_n = \dfrac{1}{2}$

**Câu 4. (3,0 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và các đường cao AD,BE,CF. Gọi AD cắt (O) tại K, KF cắt lại đường tròn (O) tại L.

c) Chứng minh CL đi qua trung điểm EF
d) Đường thẳng qua A và vuông góc CO cắt CL tại N. Chứng minh FN vuông góc với FO

**Lời giải:**

a) Gọi J là trung điểm EF. Ta chứng minh C,J,L thẳng hàng. Thật vậy:

Gọi I là trung điểm FH. Ta dễ có: $\triangle FHD \sim \triangle FEC$ nên $\triangle IHD \sim \triangle JEC$

Từ đó suy ra $\angle IDH = \angle JCE$

Mà $\angle IDH = \angle FKH = \angle LKA$

Suy ra $\angle LKA = \angle JCA$.

Suy ra C,J,L thẳng hàng. Điều phải chứng minh

b) Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ thì $\angle NFO = 90^\circ$.

Thật vậy, dễ chứng minh $\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$.

Từ đó dễ thấy $\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO$.

Goi AD cắt CF tai $H$ và $P$ là hình chiếu của $F$ lên AD, M đối xứng $H$ qua $P$.

Dễ có $\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$ và $\angle FKM = \angle ACN$ do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$.

Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{NA}{FA} = \frac{NA}{LA}\cdot\frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC}\cdot\frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC}\cdot\frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC}\cdot\frac{AC}{MK} = \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}.$$

Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ theo suy luận phần trên có điều phải chứng minh.

**Câu 5. (1,0 điểm)** Cho $S$ là tập hợp có n phần tử và k là số nguyên thỏa mãn $0 \le k \le 2^n$.

Chứng minh có thể tô màu mọi tập con của $S$ bởi hai màu xanh đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

(a) Hợp 2 tập đỏ là đỏ.

(b) Hợp 2 tập xanh là xanh.

(c) Có đúng $k$ tập đỏ.

**Lời giải:**

Ta chứng minh bằng quy nạp theo số phần tử của tập $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ với $n$ phần tử, với $n$ nguyên dương, với mọi $k$ thỏa mãn $0 \le k \le 2^n$

+) $n = 1$ đơn giản

+) Giả sử có thể tô màu các tập con của $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn với mọi $k_n$ thỏa mãn $0 \le k_n \le 2^n$. Ta sẽ chỉ ra cách tô màu $S_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ vói mọi $k_{n+1}$ thỏa mãn $0 \le k_{n+1} \le 2^{n+1}$.

TH 1. $0 \le k_{n+1} \le 2^n$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho $S_n$ và $k_n = k_{n+1}$,

Ta thu được cách tô màu các tập con của $S_n$ thỏa mãn cả ba điều kiện trên. Các tập chưa được tô sẽ là các tập con của $S_{n+1}$ chứa $n+1$, ta tô xanh hết. Dễ thấy cách tô đó thỏa mãn

TH2. $2^n + 1 \le k_{n+1} \le 2^{n+1}$. Theo TH1, ta có thể tô màu các tập con của tập $S_{n+1}$ thỏa mãn a) và b) và có $2^{n+1} - k_{n+1}$ tập đỏ. Bây giờ, đổi màu các tập: xanh thành đỏ và đỏ thành xanh. Ta được cách tô màu thỏa mãn

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh