SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ BA
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: Toán 11
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol (P): $y = x^2$ sao cho tam giác AMB vuông tại M.

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60^0. Tính độ dài MN.

Câu 2. (2 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 6; a_2 = 14; a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n - 24.(-1)^n$. Tìm $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

Câu 3. (2 điểm)

a) Tìm các đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $P(2x) = P'(x).P''(x)$ với mọi x.

b) Tìm số nguyên dương x, y và số nguyên tố p sao cho: $\frac{xy^3}{x+y} = p$.

Câu 4. (2 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ đáy lớn là CD .Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Điểm F là trung điểm của cung BC (không chứa điểm E) của đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC. Đường thẳng EF và BC cắt nhau tại G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BFD cắt tia DA tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB cắt AC và BD lần lượt tại M và N. BM cắt GH tại P; GN cắt AC tại Q.

a) Chứng minh $ST // AB$ và bốn điểm C; D; H; G nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm D; Q; P thẳng hàng.

Câu 5. (1 điểm) Mỗi đường chéo của đa giác đều 2018 cạnh đã được sơn một trong n màu. Biết rằng hai đường chéo cắt nhau tại một điểm bên trong đa giác thì tô màu khác nhau. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của n có thể được?

HƯỚNG DẪN CHẤM 11 TOÁN

Câu 1:

a)

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có các điểm cực trị của (C) là: $A(0;4)$ và $B(2;0)$.

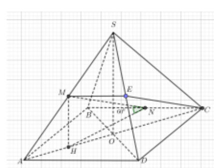
Gọi $M(x;x^2)$ thuộc (P). Khi đó: $\overrightarrow{AM} = (x;x^2-4)$ và $\overrightarrow{BM} = (x-2;x^2)$. Vì A, B không thuộc (P) nên

tam giác AMB vuông tại $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + x^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3-3x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy có ba điểm thuộc (P) để tam giác AMB vuông tại M là $M_1(0;0)$, $M_2(-1;1)$, $M_3(2;4)$.

b)



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi H là hình chiếu của M trên $(ABCD) \Rightarrow H$ là trung điểm của AO.

Áp dụng định lí cosi vào tam giác CHN, ta có

$$HN^2 = CH^2 + CN^2 - 2.CH.CN.\cos 45^0 = \left(\frac{3}{4}.a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\frac{3}{4}.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5a^2}{8}$$

Có HN là hình chiếu của MN trên $(ABCD) \Rightarrow (MN,((ABCD))) = \widehat{(MN,HN)} = \widehat{MNH} = 60^0$

$$\cos\widehat{MNH} = \frac{HN}{MN} \Rightarrow MN = \frac{HN}{\cos\widehat{MNH}} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 2:

+) Dựa vào phương trình đặc trưng, tính được công thức số hạng tổng quát của dãy là

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n - 6.(-1)^n\right].$$

Chỉ ra $\lim a_n = +\infty$.

+) Đặt $c_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ thì $\lim c_n = +\infty$ và $c_{n+1} = 2c_n - c_{n-1}$.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{c_{n-1}c_{n+1}} = \frac{2c_n}{c_{n-1}c_nc_{n+1}} = \frac{c_{n+1}-c_{n-1}}{c_{n-1}c_nc_{n+1}} = \frac{1}{c_nc_{n-1}} - \frac{1}{c_{n+1}c_n}.$$

+) Từ đó được $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{c_1c_2} - \frac{1}{c_{n+1}c_n}$.

Suy ra $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

Câu 3:

a) Xét $P(x) = C$ const, nên $P(x) = 0$ thỏa mãn.

Xét $\deg P = n, n \geq 1$, suy ra $\deg P' = n-1, \deg P'' = n-2$.

Từ phương trình ban đầu suy ra $n = (n-1) + (n-2) \Leftrightarrow n = 3$.

Đặt $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Suy ra $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $P''(x) = 6ax + 2b$ và $P(2x) = 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d$.

Ta có:

$$P(2x) = P'(x)P''(x)$$
$$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = \left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(6ax + 2b\right)$$
$$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18abx^2 + \left(4b^2 + 6ac\right)x + 2bc$$

Đồng nhất hệ số 2 vế của phương trình trên, ta có:

$$\begin{cases}8a=18a^2\\4b=18ab\\2c=4b^2+6ac\\d=2bc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{9}\\b=c=d=0\end{cases}$$. Do đó $P(x)=\dfrac{4}{9}x^3$.

Vậy, $P(x)=0$ hoặc $P(x)=\dfrac{4}{9}x^3$.

b) Bằng quy nạp dễ dàng ta chứng minh được $P(x_n) = x_n + 10$, $\forall n = 0; 1;2;3;\ldots$ Ta có $xy^3=p(x+y)\Rightarrow x\,|\,py, y\,|\,px$.

Do đó với mọi số nguyên tố $q\neq p$ ta có $v_q(x)\le v_q(y)\le v_q(x)$.

Nên $v_q(x)=v_q(y)$ và $|v_p(x)-v_p(y)|\le 1$. Do đó $x=py$ hoặc $x=y$ hoặc $y=px$.

Nếu $x=py\Rightarrow py^4=p(py+y)\Rightarrow y^3=p+1\Rightarrow p=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$.

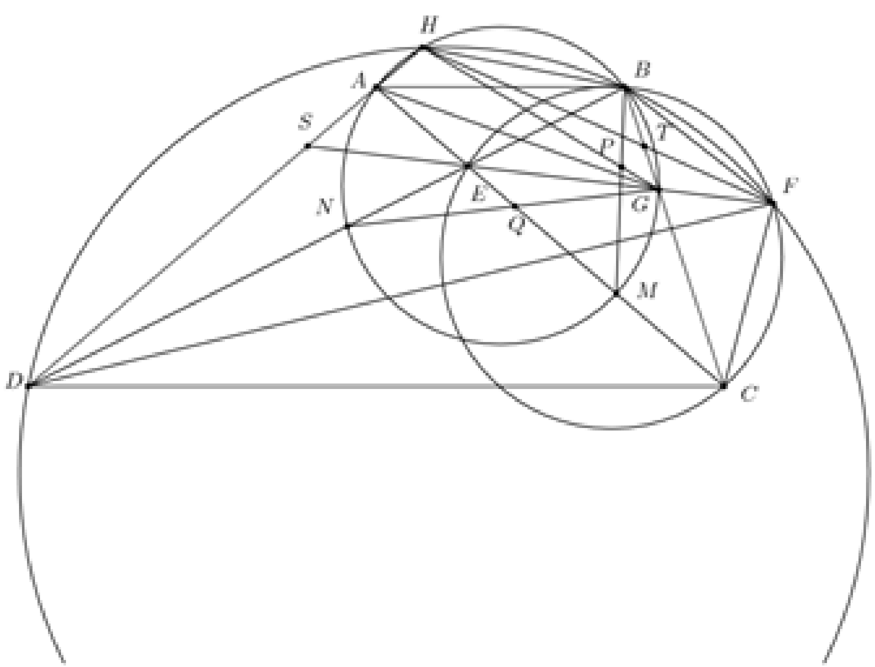
Do đó $y-1=1, y^2+y+1=p\Rightarrow y=2, p=7, x=14$.

Nếu $x=y\Rightarrow x^4=p.2x\Rightarrow x^3=2p$, mâu thuẫn do $v_2(x^3)\in\{1,2\}$ không chia hết cho 3.

Nếu $y=px\Rightarrow p^3x^4=p(x+px)\Rightarrow p^2x^3=1+p$, vô lý.

Vậy $(x,y,p)=(14,2,7)$.

Câu 4:



a)

+ Ta dễ dàng chứng minh được bổ đề: Cho tam giác ABC điểm $D \in BC$. Ta có $\frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle CAD} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AC}{AB}$

+ Gọi $T = FH \cap BC$ và $S = FG \cap DA$. Dễ thấy đường thẳng đi qua 4 điểm F, G, E, S là đường phân giác của góc $BEC,$ Ta có

$\angle TFC = \angle EFC = \angle BFC - \angle BFH = 180^0 - \angle BEC - \angle BDH$

$= 180^0 - \angle DEA - \angle EDA = \angle DAE$

+ Trong tam giác BFC với $T \in BC$, ta có

$$\frac{\sin \angle BFT}{\sin \angle TFC} = \frac{BT}{CT} \cdot \frac{CF}{BF} = \frac{BT}{CT} \Rightarrow \frac{BT}{CT} = \frac{\sin \angle EDA}{\sin \angle DAE} = \frac{AE}{ED}.$$

+ Mặt khác, vì ES là phân giác của góc AED nên $\frac{AE}{ED} = \frac{AS}{SD}$

Do đó $\frac{BT}{CT} = \frac{AS}{SD} \Rightarrow ST \parallel AB$

Ta lại có:

$$\angle SHT = \angle SHF = \angle DBF = \angle EBC + \angle CBF = \angle EBG + \angle BEG = \angle EGC = \angle SGC.$$

Do đó tứ giác $SHTG$ nội tiếp đường tròn.

Từ đó suy ra $\angle SHG = \angle STG = 180^0 - \angle GCD \Rightarrow CDHG$ nội tiếp đường tròn.

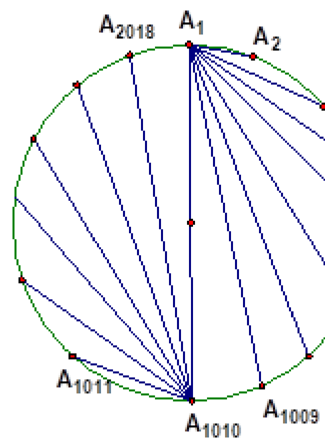
b)

Ta dễ chứng minh được $AHBG$ nội tiếp, từ đó suy ra A, H, B, G, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Áp dụng định lí Pascal cho lục giác $AHBGMN$ nội tiếp đường tròn, với $D = AH \cap BN,$ $Q = GN \cap AM,$ $P = GH \cap BM$

Ta có D, Q, P thẳng hàng (đpcm).

Câu 5:



Ta gọi những đường chéo qua tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác là các *đường chéo chính*. Đa giác đều 2018 đỉnh nên có 1009 *đường chéo chính* cùng qua tâm. Như vậy 1009 đường chéo này phải khác màu. Nên $n \geq 1009$, ta chứng minh $n = 1009$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Thật vậy xét *đường chéo chính* A_1A_{1010} , ta giữ đỉnh A_1 và cho đỉnh A_{1009} di chuyển đến những đỉnh các đỉnh từ A_{1009} , …, đến A_3 theo cùng một chiều được 1007 đường chéo không qua tâm. Tương tự giữ đỉnh A_{1010} và cho đỉnh A_1 di chuyển theo cùng một chiều từ A_{2018} đến A_{1012} ta cũng được 1007 đường chéo không qua tâm.

Như vậy ứng với một đường chéo A_1A_{1010} ta có thêm 2014 đường chéo không qua tâm và không cùng cắt nhau tại điểm bên trong đa giác. Ta tô 2015 đường chéo này cùng một màu. Do đó ta sẽ có 1009 nhóm đường chéo được tô 1009 màu khác nhau.

– Nếu có cách tô màu nhỏ hơn 1009 màu, thì vô lý! Vì có 1009 đường chéo cùng cắt nhau tại tâm nên không thể tô 1008 màu thỏa đề bài
– Bây giờ lấy bất kỳ đường chéo MN (màu của MN trùng với một trong hai màu của đường chéo chính MM' hoặc NN') Trên cung nhỏ MN luôn tồn tại một đỉnh của đa giác, giả sử là đỉnh X, ta vẽ đường kính XX', Rõ ràng đường chéo chính XX' này sẽ khác màu với các *đường chéo chính* MM'; NN'.
Vậy có ít nhất 1009 cách tô màu các đường chéo thỏa đề.