SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

Ngày thi: 25/11/2019

ĐỀ THI THÁNG LẦN 3 LỚP 10 TOÁN

NĂM HỌC 2019 - 2010

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu1. **(2,0 điểm)** Giải phương trình : $3x^2-4x+2+(x+2)\sqrt{2-x^2}=0$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Có bao nhiêu số có 10 chữ số, trong đó mỗi chữ số 1,2,3,4,5 đều có mặt đúng 2 lần
b) Có bao nhiêu số chia hết cho 9, có 5 chữ số, các chữ số thuộc tập {0,1,2,3,4,5,6}, có một số lẻ các chữ số lẻ (các chữ số không nhất thiết khác nhau)

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f(2x+y-f(x+y))=f(xy)-yf(x)\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC, một đường tròn qua B,C cắt cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P là giao điểm của CM và BN, đường tròn tâm P, bán kính PB cắt lại AB tại F, đường tròn tâm P bán kính PC cắt lại AC tại E sao cho E thuộc đoạn AC và F thuộc đoạn AB. Gọi O, J tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và PEF.

a) Chứng minh rằng phân giác các góc $\angle EAF$ và $\angle EPF$ song song với nhau.
b) Chứng minh rằng J, P, O thẳng hàng

Câu 5 (1,0 điểm). Cho m là số nguyên dương và p là số nguyên tố > m. Chứng minh rằng số số nguyên dương n mà $m^2+n^2+p^2-2mn-2mp-2np$ là số chính phương không phụ thuộc vào p

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 3 LỚP 10 TOÁN NĂM HỌC 2019-2020

Câu1. (2,0 điểm) Giải phương trình : $3x^2-4x+2+(x+2)\sqrt{2-x^2}=0$

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$2x^2-(2-x^2)-4x+(x+2)\sqrt{2-x^2}=0$$

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}$, ta được: $-t^2+(x+2)t+2x^2-4x=0$.

Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn t, x là tham số, ta có:

$$\Delta=(x+2)^2+4(2x^2-4x)=9x^2-12x+4=(3x-2)^2$$

Vậy ta được: $t=2-x$ hoặc $t=2x$

+) $t=2-x$, tức là: $\sqrt{2-x^2}=2-x \leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ 2-x^2=x^2-4x+4 \end{cases} \leftrightarrow x=1$

+) $t=2x$, tức là: $\sqrt{2-x^2}=2x \leftrightarrow 2-x^2=4x^2,(x\ge 0) \leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1, x=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Có bao nhiêu số có 10 chữ số, trong đó mỗi chữ số 1,2,3,4,5 đều có mặt đúng 2 lần
d) Có bao nhiêu số chia hết cho 9, có 5 chữ số, các chữ số thuộc tập {0,1,2,3,4,5,6}, có một số lẻ các chữ số lẻ (các chữ số không nhất thiết khác nhau)

Lời giải:

a)

+) Chọn chỗ cho hai chữ số 1: Có C_{10}^2 cách

+) Chọn chỗ cho hai chữ số 2: Có C_8^2 cách

+) Chọn chỗ cho hai chữ số 3: Có C_6^2 cách

+) Chọn chỗ cho hai chữ số 4: Có C_4^2 cách

+) Xếp 2 chữ số 5: 1 cách

Đáp số: $C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2$ số thỏa mãn

b) Gọi số cần lập là $\overline{abcde}$, ta có: $a+b+c+d+e$ lẻ, chia hết cho 9 và $1 \le a+b+c+d+e \le 30$ nên $a+b+c+d+e=9$ hoặc $a+b+c+d+e=27$, hơn nữa $1 \le a \le 6$ và $0 \le b,c,d,e \le 6$

Trường hợp 1: $a+b+c+d+e=27 \leftrightarrow (7-a)+(7-b)+(7-c)+(7-d)+(7-e)=8$

Đặt $x=7-a, y=7-b, z=7-c, t=7-d, u=7-e$ thì $x+y+z+t+u=8(*)$ và $1 \le x \le 6, 1 \le y,z,t,u \le 7$

Do $x,y,z,t,u \ge 1$ nên nếu thỏa mãn (*) thì hiển nhiên $x,y,z,t,u \le 6$.

Vậy ta không cần quan tâm đến điều kiện $x \le 6$ và $y,z,t,u \le 7$

Theo bài toán chia kẹo Euler thì có C_7^4 số thỏa mãn

Trường hợp 2. $a+b+c+d+e=9$, $1 \le a \le 6, 0 \le b,c,d,e \le 7$

Đặt $x=a, y=b+1, z=c+1, t=d+1, u=e+1$ thì $x+y+z+t+u=13(**)$ và $1 \le x \le 6, 1 \le y,z,t,u \le 7$

Số nghiệm nguyên dương của (**) là C_{12}^4

+) Nếu $x \ge 7$ thì $y+z+t+u \le 6$ suy ra $y,z,t,u < 7$ nên không trùng với trường hợp có 1 trong các số $y,z,t,u \ge 8$, có $(x-6)+y+z+t+u=7$ nên có C_6^4 bộ thỏa mãn.

+) Nếu tồn tại một trong 4 số y,z,t,u lớn hơn hoặc bằng 8, thì các số còn lại <6, nên không trùng với trường hợp $x \ge 7$, nếu $y \ge 8$ thì có $x+(y-7)+z+t+u=6$, nên có C_5^4 số thỏa mãn. Tương tự, có $4.C_5^4$ số thỏa mãn trường hợp này.

Vậy có $C_7^4+C_{12}^4-C_6^4-4.C_5^4$ số thỏa mãn

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(2x+y-f(x+y)) = f(xy) - yf(x) \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lời giải:

$P(x,y)$ thay cho $f(2x+y-f(x+y))=f(xy)-yf(x)$

$P(x,1)$ được $(*):f(2x+1-f(x+1))=0$

$P(x,-1)$ được $(**):f(2x-1-f(x-1))=f(-x)+f(x)$

Gọi a thỏa mãn: $f(a)=0$. $P(0,a)$ $\Rightarrow$ $f(a-f(a))=0=(1-a)f(0)$.

TH1) $f(0)\neq 0$: $\Rightarrow$ $f(a)=0$ chỉ khi $a=1$. Vậy $(*)$ $\Rightarrow$ $f(x+1)=2x$.

TH2) $f(0)=0$: $P(x,0)\Rightarrow$ $(***):f(2x-f(x))=0$

Chứng minh dễ rằng: $f(1)=0$. $P(1,y)$ được $f(y+2-f(y+1))=f(y)$

.Trong biểu thức trên thay $y=2x+1-f(x+1)$ và áp dụng $(*),(**),(***)$ để được $f(x+2)+f(-x-2)=0$

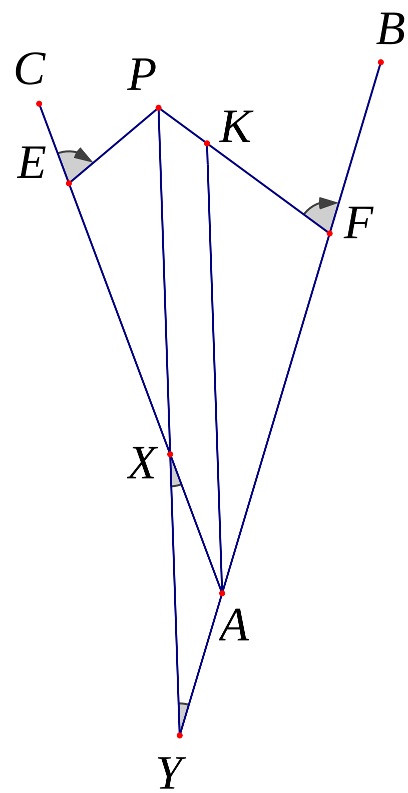
$P(x,-x)$ được $f(x)(1-x)=f(-x^2)=f(-x)(1+x)$, so $f(x)\equiv 0$.

Việc còn lại là thử lại thôi.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC, một đường tròn qua B,C cắt cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P là giao điểm của CM và BN, đường tròn tâm P, bán kính PB cắt lại AB tại F, đường tròn tâm P bán kính PC cắt lại AC tại E sao cho E thuộc đoạn AC và F thuộc đoạn AB. Gọi O, J tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và PEF.

c) Chứng minh rằng phân giác các góc $\angle EAF$ và $\angle EPF$ song song với nhau.
d) Chứng minh rằng J, P, O thẳng hàng

Lời giải:



a) Ta có tứ giác BCMN nội tiếp nên $\angle NCP = \angle MBP$.

Lại có tam giác PEC cân tại P nên $\angle PEC = \angle PCE$, tam giác PFB cân tại P nên $\angle PBF = \angle PFB$, suy ra $\angle CEP = \angle BFP$

Gọi phân giác góc $\angle EPF$ cắt AE, AF tại X và Y thì

$$\angle AXY = \angle EXP = \angle CEP - \angle EPX = \angle BFP - \angle FPY = \angle AYX .$$

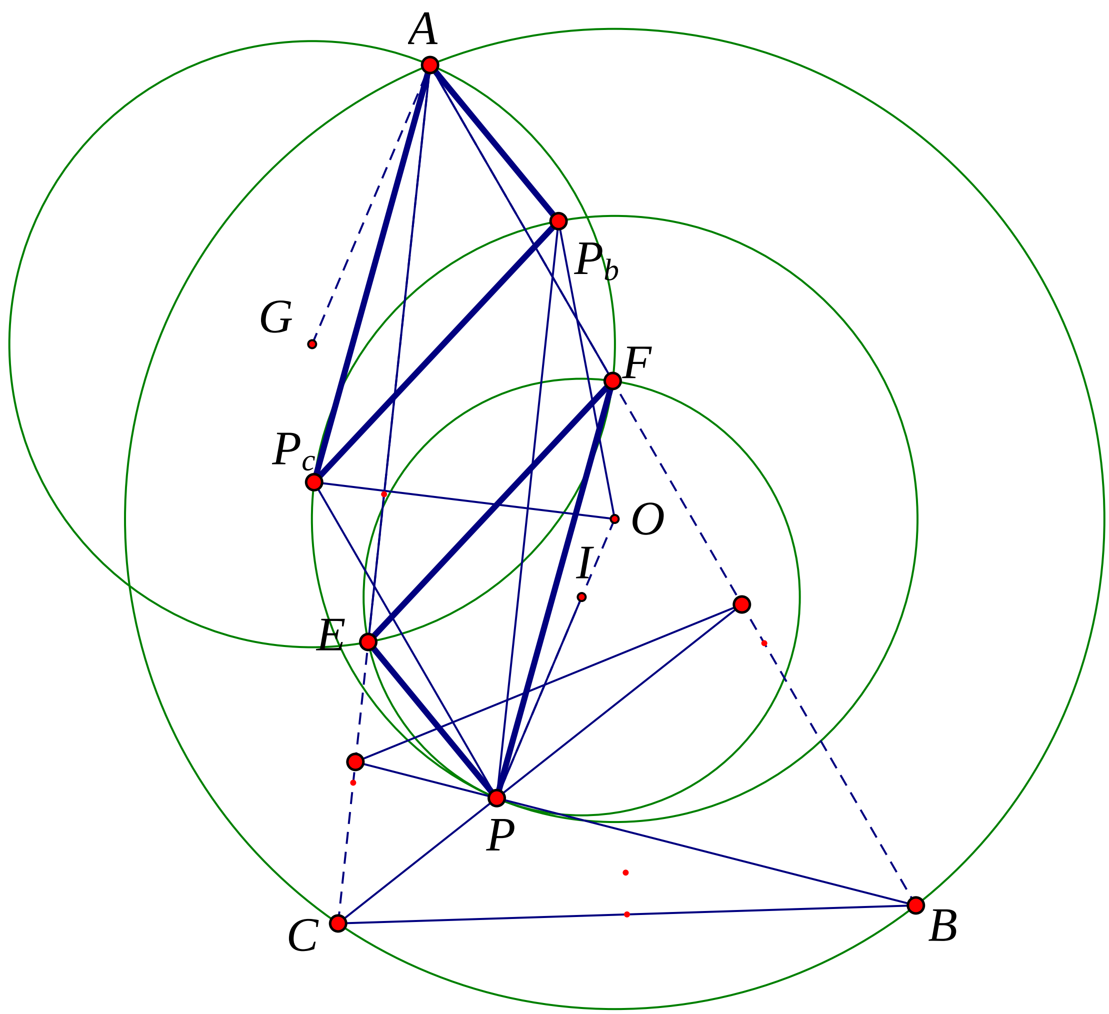
Kẻ đường thẳng qua A song song PX cắt PF tại K thì $\angle KAF = \angle XYA = \angle AXY = \angle XAK$, tức là AK là phân giác góc $\angle EAF$.

Vậy phân giác của hai góc $\angle EAF$ và $\angle EPF$ song song với nhau.

b)

Trước hết ta có bổ đề rất quen thuộc và cũng rất dễ chứng minh sau:

Bổ đề: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Khi đó đường thẳng đối xứng với AO qua phân giác trong góc A vuông góc với BC.



Vào bài toán chính.

Gọi P_b, P_c đối xứng với P qua trung trực của CA, AB, G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle AEF$. Do $\angle P_bAC = \angle PCA = \angle PEC$ nên $P_bA \parallel PE$, mà $PP_b \parallel AC$ nên PP_bAE là hình bình hành , do đó $PP_b \overset{\parallel}{=}$ AE, $PP_c \overset{\parallel}{=}$ AF, $\angle P_bPP_c = \angle EAF$ nên $\triangle AEF$ và $\triangle PP_bP_c$ bằng nhau, mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle PP_bP_c$ nên AG || PO và AG = PO . Mặt khác theo câu a) phân giác l_1, l_2 các góc $\angle EAF$, $\angle EPF$ song song, mà theo bổ đề trên, đường thẳng d_1 đối xứng với AG qua phân giác góc $\angle EAF$ và đường d_2 đối xứng với PJ qua phân giác góc $\angle EPF$ cùng vuông góc với EF. Ta được $d_1 \parallel d_2$. Mà $l_1 \parallel l_2$ suy ra PJ || AG || PO tức là J $\in$ OP . Ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho m là số nguyên dương và p là số nguyên tố > m. Chứng minh rằng số số nguyên dương n mà $m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$ là số chính phương không phụ thuộc vào p

Lời giải:

Đặt $\Delta = m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$ thì $\Delta = (m+n-p)^2 - 4mn$.

Xét $f(x) = mx^2 - (m+n-p)x + n$ thì Δ chính phương khi và chỉ khi $f(x)$ có 2 nghiệm hữu tỉ hay $f(x) = (a_1x - b_1)(a_2x - b_2)$ với $a_1, a_2 > 0$ và $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$.

Hơn nữa: $a_1a_2 = m, b_1b_2 = n$ nên b_1, b_2 cùng dấu.

Lại có $p = f(-1) = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$ nên nếu $b_1, b_2 > 0$ thì có mâu thuẫn do p nguyên tố.

Vậy $b_1, b_2 < 0$. Nếu $a_1 + b_1 = 1, a_2 + b_2 = p$ thì $p = p.1 < a_2.a_1 = m$. (do $p = a_2 + b_2 < a_2, 1 = a_1 + b_1 < a_1$. Mâu thuẫn.

Từ đó $a_1 + b_1 = -1, a_2 + b_2 = -p$ nên $b_1 = -1 - a_1, b_2 = -p - a_2$.

Suy ra $n = b_1b_2 = (1 + a_1)(p + a_2)$.

Tức là mỗi số nguyên dương n ứng với một cặp (a_1, a_2) mà $a_1a_2 = m$.

Chú ý rằng mỗi cặp (a_1, a_2) như thế cũng chỉ cho 1 giá trị n

(Nếu $(1 + a_1)(p + a_2) = (1 + x)(p + y)$ với $xy = a_1a_2 = m$ thì được $a_1 = x, a_2 = y$)

Ta được số giá trị n chính là số ước nguyên dương của m.