SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN I
NĂM HỌC 2019-2020
MÔN: TOÁN- KHỐI: 10

Thời gian :180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)
Ngày thi: 16 tháng 9 năm 2019

Câu 1(2 điểm) a) Tính giá trị của biểu thức

$$A = \cos^2 5^0 + \cos^2 10^0 + \cos^2 15^0 + \ldots + \cos^2 85^0$$

b) Cho hai góc nhọn a, b thỏa mãn $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$. Chứng minh rằng $\cos(a+b) > 0$.

Câu 2(2,5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường phân giác trong của các góc A, B, C với đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác A'B'C'.

b) Gọi P, Q, R tương ứng là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh BC, CA, AB và G là trọng tâm của tam giác PQR. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IG} = \dfrac{r}{3R}\overrightarrow{OI}$ (R, r là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC).

Câu 3 (2,5 điểm) a) Cho số nguyên n lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^n - n^2 + n - 1$ chia hết cho $(n-1)^2$.

b)Cho n là một số nguyên dương và a là một số nguyên. Chứng minh $\sum_{k=1}^{n} (a^2+1)^{3k}$ chia cho $a^2 + a + 1$ chỉ có thể dư 0 hoặc -1.

Câu 4(2 điểm) a) Bên trong hoặc trên các cạnh của một tam giác đều với cạnh bằng 1 ta đặt *n* điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong chúng đều lớn hơn $\dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của *n*.

b) Xét 2011 điểm phân biệt tùy ý cùng nằm trên một đường thẳng. Hai điểm bất kì trong chúng đều được nối với nhau bởi một đoạn thẳng và trung điểm của đoạn thẳng đó được tô màu đỏ. Chứng minh rằng số điểm được tô màu đỏ nhỏ nhất có thể là 4019.

Câu 5(1 điểm) Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(1-b)}{ab+1} + \frac{b(1-c)}{bc+1} + \frac{c(1-a)}{ca+1} \geq 0$$

------------------------Hết------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Đáp án 10 Toán

Câu 1: a) (1 điểm).

$$A = \frac{1+\cos 10^\circ}{2} + \frac{1+\cos 20^\circ}{2} + \dots + \frac{1+\cos 170^\circ}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[17 + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 90^\circ\right]$$

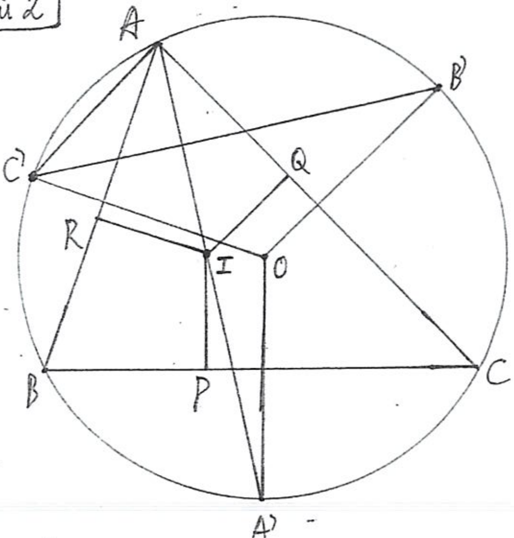
$$= \frac{17}{2}$$, do $\cos\alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$.

b) (1 điểm)

giả thiết $\Rightarrow \frac{1-\cos 2a}{2} + \frac{1-\cos 2b}{2} < 1 \Rightarrow \cos 2a + \cos 2b > 0$

$\Rightarrow 2\cos(a+b).\cos(a-b) > 0$. Mà $a-b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos(a-b) > 0$, suy ra $\cos(a+b) > 0$.

Câu 2



a) (1 điểm). Ta cần CM: $AA' \perp B'C' \Leftrightarrow \widehat{C'AA'} + \widehat{AC'B'} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{C'AB} + \widehat{BAA'} + \widehat{AC'B'} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{ACB}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = 90^\circ$ (đúng)

b) (1,5 điểm) Vì G là trọng tâm ΔPQR nên $3.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR}$

$= \frac{r}{R}\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}\right)$ (do $\overrightarrow{IP} = \frac{r}{R}.\overrightarrow{OA'}, \dots$)

Mà $\Delta A'B'C'$ có O là tâm đtr ng tiếp và I là trực tâm (theo phần a) nên

$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OI}$ (theo 1 hệ thức cơ bản)

Vậy $3.\overrightarrow{IG} = \frac{r}{R}.\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{r}{3R}.\overrightarrow{OI}$

Câu 3 a) (1 điểm). Ta có $n^n - n^2 + n - 1 = n^2(n^{n-2} - 1) + (n-1)$

$= (n-1)\left[n^2(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + 1\right]$

$= (n-1)\left[\underbrace{n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1}_{S}\right]$

$\forall k \in \mathbb{Z}^+$ thì $n^k \equiv 1 \pmod{n-1}$ nên tổng $S \equiv \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-2 \text{ số}} + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}$

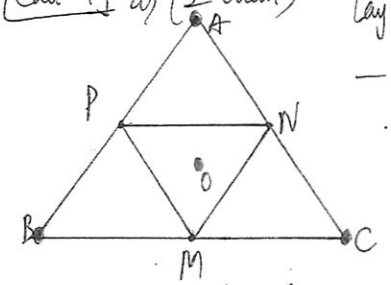
$\Rightarrow (n-1).S \,\vdots\, (n-1)^2$

b) (1,5 điểm) Ta có $a^2+1 \equiv -a \pmod{a^2+a+1} \Rightarrow (a^2+1)^3 \equiv -a^3 \equiv -1 \pmod{a^2+a+1}$

$\Rightarrow (a^2+1)^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{a^2+a+1}$

$\to \sum\limits_{k=1}^{n} (a^2+1)^{3k} \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \pmod{a^2+a+1}$. Mà $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ (xong

$\boxed{\text{Câu 4}}$ a) (1 điểm)



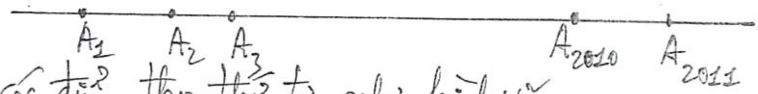
Lấy M, N, P là trung điểm BC, CA, AB của ΔABC đều với cạnh $= 1$.

– Nếu $n \geq 5$: thì $\exists$ ít nhất 2 điểm trong n điểm sao cho 2 điểm đó cùng nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác đều nhỏ. (cạnh $= \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ k/cách giữa chúng $\leq \frac{1}{2}$ (loại).

Vậy phải có $n \leq 4$. Khi $n = 4$ ta lấy 4 điểm như sau:

A, B, C và trọng tâm O của $\Delta ABC \Rightarrow$ khoảng cách giữa 2 điểm bất kì trong 4 điểm này $\geq \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ (thỏa mãn). Tóm lại max của n là 4.

b) (1 điểm)



Đặt tên các điểm theo thứ tự như hình vẽ.

Xét các đoạn $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_{2011}$ và $A_2A_{2011}, A_3A_{2011}, \ldots, A_{2010}A_{2011}$.

Ta thấy 4019 đoạn này có các trung điểm di chuyển dần từ trái sang phải và đều khác nhau $\Rightarrow$ số điểm tô màu đỏ ≥ 4019.

Chỉ ra trường hợp có đúng 4019 điểm màu đỏ:

Coi đường thẳng là trục số và các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2011}$ có tọa độ là $0, 1, \ldots, 2010$.

Khi đó các trung điểm sẽ có tọa độ dạng k hoặc $l + \frac{1}{2}$, với $k, l \in \mathbb{N}$ và $1 \leq k \leq 2009$, $0 \leq l \leq 2009 \Rightarrow$ Có đúng 4019 điểm màu đỏ.

$\boxed{\text{Câu 5}}$ Bđt $\Leftrightarrow \sum\limits_{cyc}\left[\frac{a(1-b)}{ab+1} + 1\right] \geq 3 \Leftrightarrow \sum\limits_{cyc} \frac{a+1}{ab+1} \geq 3$

Dùng Bđt AM – GM cho vế trái thì $VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$

Ta chỉ còn CM bđt dưới đây là xong:

$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (ab+1)(bc+1)(ca+1)$

$\Leftrightarrow abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1 \geq a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) + 1$

$\Leftrightarrow abc + 4 \geq a^2b^2c^2 + 3abc + 1$ (do $a+b+c=3$)

$\Leftrightarrow 3 \geq a^2b^2c^2 + 2abc$ $(*)$

Mà $3 = a+b+c \geq 3.\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow (*)$ đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.