SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ HAI
LỚP 10 TOÁN
NĂM HỌC 2019-2020
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho hàm số bậc hai $f(x)$ thỏa mãn $f(x+1)-f(x)=x, \forall x\in \mathbf{R}$ và $f(0)=-1$.
Tìm $f(x)$ và giải bất phương trình $f(x)<0$.

b) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thỏa mãn $f(2019x-f(0))=2019x^2, \quad \forall x\in\mathbf{R}$

Câu 2. (2 điểm)

a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho : $P(2x+1)-P(2x-1)=2020, \forall x\in\mathbf{R}$

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn đẳng thức sau:

$$P(x^3)=P(x).P(x^2)+x^2P(x)+xP(x^2)\,, \forall x\in\mathbf{R}$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Cho đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm H. Hai điểm E, F di động trên d sao cho $\overline{HE}.\overline{HF}=-k^2$ ($k\neq 0$ cho trước). Vẽ đường kính HI của (O). Đường tròn (IEF) cắt đường thẳng IH tại J khác I.

1) Chứng minh rằng J là điểm cố định.
2) IE, IF và đường tròn (IEF) cắt lại (O) lần lượt tại A, B và K. Chứng minh rằng các đường thẳng IK, AB, EF đồng quy.

b) Tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE. M là trung điểm BC. Đường thẳng AM cắt lại đường tròn (ADE) tại I, AM cắt DE tại K. Chứng minh rằng:

$$\frac{ID}{IE}=\frac{AB}{AC}\ ;\ \frac{KD}{KE}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Câu 4. (2 điểm)

Tìm các số tự nhiên a; b và số nguyên tố p lẻ sao cho p^a+p^b là số chính phương.

Câu 5. (2 điểm) Cho đa giác đều n đỉnh ($n\in\mathbb{N}^*$). Hỏi từ các đỉnh của đa giác lập được bao nhiêu hình thang không phải hình chữ nhật trong các trường hợp sau:

a) n lẻ
b) n chẵn

……………………..Hết………………………

HƯỚNG DẪN CHẤM 10 TOÁN *(3 trang)*

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$.
Khi đó ta cần $2ax+a+b=x$
$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$
Mà $f(0)=-1$ nên $c=-1$. Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1$.
$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow -1<x<2.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Đặt $2019x-f(0)=t$ thì $x=\dfrac{t+f(0)}{2019}$, thay vào phương trình ta có:
$f(t)=\dfrac{\left[t+f(0)\right]^2}{2019}$. Cần tìm $f(0)$
Cho $t=0$ thì $f(0)=\dfrac{\left[f(0)\right]^2}{2019} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}f(0)=0\\ f(0)=2019\end{array}\right.$
Thử lại cả hai trường hợp đều thỏa mãn.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Ta có $P(2x+1)-P(2x-1)=1010(2x+1-2x-1)$
$\Leftrightarrow P(2x+1)-1010(2x+1)=P(2x-1)-1010(2x-1)$
Đặt $H(x)=P(x)-1010x$. Khi đó $H(2x+1)=H(2x-1)$
Như vậy $H(x)=c$ với c là hằng số bất kì
Khi đó $P(x)=1010x+c$ với c là hằng số bất kì. Thử lại thỏa mãn.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Đặt $H(x)=P(x)+x$ thì $H(x^3)=H(x).H(x^2)$
Ta thấy bậc của $H(x)$ lớn hơn 0.
Đồng nhất hệ số bậc cao nhất a_n của $H(x)$ ta có $a_n=1$
Gọi $m<n$ là số nguyên dương lớn nhất sao cho $a_m\neq 0$.
Đồng nhất hệ số bậc $3n-1$ ở hai vế ta có $0=a_n.a_m \Leftrightarrow a_m=0$ mâu thuẫn.
Vậy $H(x)=x^n$ với n là số nguyên dương tùy ý. Thử lại thỏa mãn.
Vậy $P(x)=x^n-x$.</td><td>1</td></tr>
</table>

3	a) (Tự vẽ hình) i) Do tứ giác $IEFJ$ là tứ giác nội tiếp nên $\overline{IE}.\overline{IF} = \overline{IH}.\overline{IJ} = -k^2$. Mà H cố định nên J cố định. (đpcm) ii) Do IH là đường kính của (O) nên $HAI = HBI = 90^0$ $\Rightarrow HFB = IHB = IAB$. Như vậy $ABFE$ là tứ giác nội tiếp. Xét 3 đường tròn $(O);(IEF);(ABFE)$ có ba trục đẳng phương là IK, AB, EF Suy ra 3 đường thẳng trên đồng quy (đpcm). b) Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Q là trung điểm AH. Vì $QEH = QHE; MEC = MCE$ $\Rightarrow QEM = QEH + MEC = FHC + MCE = 90^0$ Như vậy ME là tiếp tuyến của đường tròn (AED) tại E. Tương tự MD là tiếp tuyến của (AED) tại D. Xét tam giác AED có K nằm trên ED ; A, K, M thẳng hang nên AK là đường đối trung của tam giác AED $\Rightarrow \frac{KD}{KE} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ (đpcm).	**2**
4	+ Xét trường hợp $a = b = 0$. Khi đó $2p$ là số chính phương $\Leftrightarrow p = 2$ (loại) + Không giảm tổng quát giả sử $a \le b$. + Nếu $a = 0 < b$ thì $p^b = (k-1)(k+1)$ với k là số nguyên dương thỏa mãn $p^a + p^b = k^2$. Do p lẻ nên k chẵn; và từ đó $(k-1;k+1)$ suy ra $\begin{cases} 1 = k-1 \\ p^b = k+1 \end{cases}$ Như vậy $k = 2; p = 3; b = 1$. Thử lại thỏa mãn. + Xét $a;b > 0$. Ta có: $p^a + p^b = p^a(1 + p^{b-a})$. Từ đây ta thấy nếu a = b thì k^2 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (vô lý). Vậy suy ra $a < b$. Khi đó $v_p(p^a + p^b) = a = v_p(k^2) = 2.v_p(k)$ $\Rightarrow a$ chẵn. Đặt $a = 2.c$ $\Rightarrow k = p^c.k_1$ với $(k_1, p) = 1$; k_1 là số chẵn. Khi đó $1 + p^{b-a} = (k_1)^2 \Leftrightarrow p^{b-a} = (k_1 - 1)(k_1 + 1)$. Lại có $(k_1 - 1; k_1 + 1) = 1$ nên $\begin{cases} 1 = k_1 - 1 \\ p^{b-a} = k_1 + 1 \end{cases}$ Suy ra $k_1 = 2; p = 3; b - a = 1$ Như vậy ta có $p = 3$; $(a,b) = (2c; 2c+1)$ hoặc $(2c+1; 2c)$ với $c \in \mathbb{N}$	**2**

5	a) Đặt $n=2k+1$ Ta có một số nhận xét: + Trường hợp này khi chọn 4 đỉnh bất kì của đa giác đều không thể tạo ra hình chữ nhật (do muốn có hình chữ nhật thì đường chéo của hình chữ nhật phải là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác). + Hình thang nội tiếp đường tròn là hình thang cân. Đánh số đỉnh từ A_1 đến A_{2k+1} theo chiều kim đồng hồ. Kẻ đường kính đi qua A_1 là A_1B_1 ; chia $2k$ đỉnh còn lại thành hai nửa; mỗi nửa đường tròn chứa k đỉnh. Ta sẽ đếm những hình thang A_1B_1 làm trục đối xứng đi qua hai đáy. Để hình thang nhận A_1B_1 làm trục đối xứng thì hai đáy của hình thang đó phải vuông góc với A_1B_1. Có k đường thẳng như vậy được tạo ra. $\Rightarrow$ chúng ta có C_k^2 hình thang được tao ra bằng cách chọn 2 trong k đường thẳng đó làm đáy của hình thang. Cho chạy từ A_1 đến A_n ta có số hình thang nhận được là $C_k^2.(2k+1)$	**1**
	b) Đặt $n=2k$ Với ý tưởng tương tự câu a, ta sẽ chia các hình thang của chúng ta thành hai trường hợp <u>TH1:</u> Đường thẳng đối xứng đi qua hai đáy là đường kính đi qua trung điểm hai cạnh đối diện của đa giác đều. Ta thấy một đường kính như vậy chia đường tròn thành hai nửa; mỗi nửa có k điểm. Tương tự câu a chúng ta sẽ có $k.C_k^2$ hình thang do có k đường kính như vậy. <u>TH2:</u> Đường thẳng đối xứng đi qua hai đáy là đường kính đi qua hai điểm của đa giác. Ta thấy một đường kính như vậy chia đường tròn thành hai nửa; mỗi nửa có k-1 điểm. Tương tự câu a chúng ta sẽ có $k.C_{k-1}^2$ hình thang do có k đường kính như vậy. Như vậy tổng cộng chúng ta sẽ có $k.C_k^2+k.C_{k-1}^2$ hình thang. Nhưng ta thấy, nếu đếm như vậy thì mỗi hình chữ nhật sẽ được đếm hai lần; mà số hình chữ nhật là C_k^2 $\Rightarrow$ số hình thang không phải hình chữ nhật là $(k-2).C_k^2+k.C_{k-1}^2$	**1**