SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN IV- KHỐI 10

NĂM HỌC 2019 - 2020

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có 02 trang)

Ngày thi: 11 tháng 05 năm 2020

Bài 1: (1,5 điểm) Cho (C): $y = x^2 - 3x$ và (d): y = x – m. Tìm giá trị của m sao cho đồ thị hàm số (C) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2 \in Z$ thỏa mãn $x_1 \vdots 2x_2$.

Bài 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3x^2 + 5x + 14 = \sqrt{x^2 + 5}(3x + 6)$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 5 \\ y^2 + xy + x = 7 \end{cases}$$

Bài 3: (3,5 điểm)

a) Cho hình vuông ABCD. Điểm M di chuyển trên đường thẳng DC. Lấy I sao cho $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BM}$. Tìm vị trí điểm M sao cho AI $\perp$ BM.

b) Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F và có BC = a, CA = b, AB = c, bán kính đường tròn ngoại tiếp R và đường tròn nội tiếp là r. CMR:

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{8}.\frac{r^2}{R^2}.\frac{1}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}}$$

c) Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC nhọn có đường cao (AD): x = -1, đường trung tuyến (BM): x – 2y = 1, tâm đường tròn ngoại tiếp K(2; -1). Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC và tìm tọa độ các điểm A, B, C biết B có tung độ nhỏ hơn -1.

Bài 4: (1,5 điểm) Cho a, b, c > 0.

a) CMR:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}\geq\frac{a+b}{c^2+ab}$$

b) Cho a + b + c = 3. CMR:

$$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc}+\frac{ca(c+a)}{b^2+ca}+\frac{ab(a+b)}{c^2+ab}\geq 3$$

Bài 5: (1,5 điểm) Có n tấm thẻ ghi số từ 1 đến n. Xếp chúng thành một chồng theo thứ tự tăng dần từ trên xuống dưới, tức là từ 1 đến n. Mỗi bước, ta rút một thẻ hoặ một tập bất kì gồm các tấm thẻ liên tiếp nhau, sau đó giữ nguyên thứ tự rồi nhét chúng vào chỗ bất kì của chồng thẻ.

a) Khi n = 5, tìm cách đảo thứ tự chồng thẻ thành từ n đến 1 sau 3 bước.

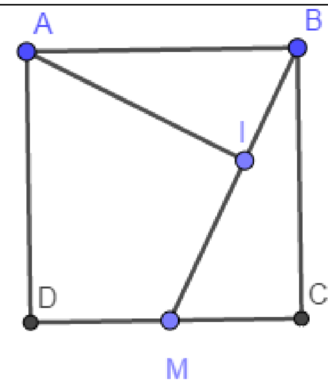
b) Khi n > 2 bất kì, hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để có thể đảo ngược chồng thẻ thành từ n đến 1?

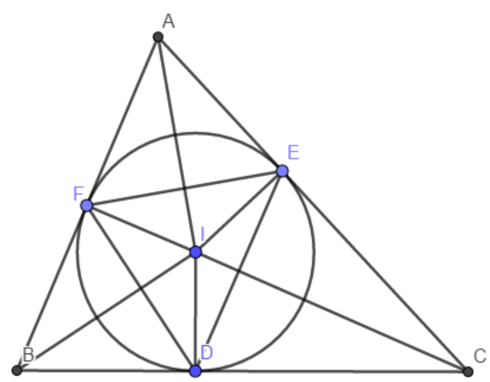
HƯỚNG DẪN CHẤM

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU MÔN TOÁN KHỐI 10 - LẦN IV

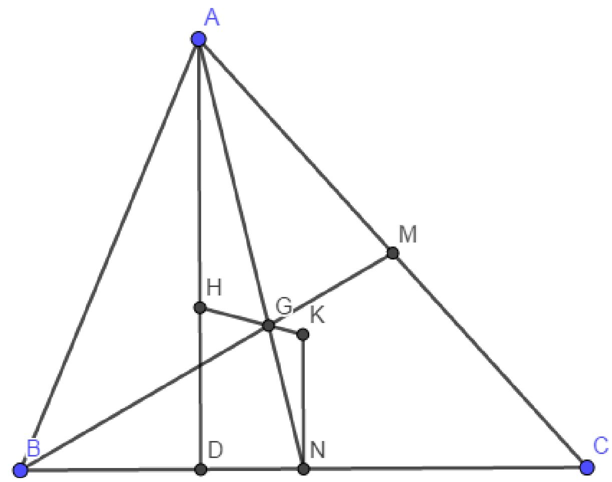
NĂM HỌC 2019 -2020

Ý	Lời giải	Điểm
1	- Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-4x+m=0$ (*) Để 2 đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta=4(4-m)>0 \Leftrightarrow 4>m$ - Khi m < 4, theo định lí Vi-et: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m \end{cases}$ Mà $x_1,x_2 \in Z$ và $x_1 \vdots 2x_2$ nên x_1 chẵn, nên x_2 chẵn. $\Rightarrow x_1 \vdots 4 \Rightarrow x_2 \vdots 4$ - Lại có $4 \vdots x_2 \Rightarrow x_2 \in 4;-4$ - Với $x_2=4$ thì $x_1=0$ và m = 0 Với $x_2=-4$ thì $x_1=8$ và m = -32	0,5đ 0,5đ 0.5đ
2	$2(x^2+5)+x^2+5x+4=\sqrt{x^2+5}(3x+6)$ Đặt $\sqrt{x^2+5}=t$. Khi đó: $2t^2+(x+1)(x+4)=(3x+6)t$ $\Leftrightarrow 2t^2+(x+1)(x+4)=[2(x+1)+(x+4)]t$ $\Leftrightarrow (t-(x+1))(2t-(x+4))=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x+1 \\ 2t=x+4 \end{array}\right.$. - Xét $\sqrt{x^2+5}=x+1$. Giải ra ta được: x = 2 - Xét $2\sqrt{x^2+5}=x+4$. Giải ra ta được: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$ Vậy x = 2 hoặc $x=\dfrac{2}{3}$	0,5đ 0,5đ
3	$$\begin{cases} x^2+xy+y=5 \\ y^2-y=x^2-x+2 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+xy=5 \\ y^2+x=x^2+y+2 \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+xy=5 \\ y^2+x+xy=7 \end{cases}$$ Cộng 2 vế ta được: $(x+y)^2+(x+y)=12$	0,5đ

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Giải ra được: $\left[\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=-4 \end{array}\right.$
- Xét x + y =3, thay vào ta được (x;y) = (1;2)
- Xét x + y =-4, thay vào ta được (x;y) = $\left(-\frac{9}{5};-\frac{11}{5}\right)$</td>
<td>0,5đ</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>- Giả sử: $\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CD}$
Phân tích:
$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}-x\overrightarrow{AB}$$
$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BM}=$
$\left(1-\frac{2}{5}x\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$
- Vì $AI\perp BM$ nên $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BM}=0$
Thay vào ta được:
$$\left(1-\frac{2}{5}x\right)(-x)+\frac{2}{5}=0$$
Giải ra ta được: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

</td>
<td>0,5đ

0,5đ</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>- Ta có:
$$S_{DEF}=\frac{DE.EF.FD}{4r}$$
Mà EF = IA.sinA
$$IA=\frac{r}{sin\frac{A}{2}}$$
$$sinA=\frac{a}{2R}$$
Do đó:
$$EF=\frac{r.a}{2R.sin\frac{A}{2}}$$
Làm tương tự, ta có:
$$DE=\frac{r.c}{2R.sin\frac{C}{2}}$$
$$DF=\frac{r.b}{2R.sin\frac{B}{2}}$$
Thay vào, ta được:
$$S_{DEF}=\frac{r^2a.b.c}{8.4R^3sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{8}.\frac{r^2}{R^2}\frac{1}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}}S_{ABC}$$

</td>
<td>0,5đ

0,5đ</td>
</tr>
</table>

6a	Trực tâm H thuộc AD nên H(-1;h) Lấy G là trọng tâm tam giác, ta có: $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ Do đó: G(1;$\frac{1}{3}(h+1)-1$) Mà G thuộc BM nên $1-\frac{2}{3}(h+1)+2=1$ Giải ra được h = 2. Vậy H(-1;2)	0,5đ
6b	- Vì B thuộc BM nên B(2b+1;b) (b < -1) Vì (AD): x = -1 nên (BC): y = b.  - Lấy N là trung điểm BC thì N(2;b) nên $\overrightarrow{KN} = (0; b+1)$ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KN} = (0; 2b+2)$ nên A(-1; -2b) Từ a có G(1;0). Mà $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$ nên $M(-b+1; \frac{-b}{2})$ - Lại có: $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AM} = 0$ nên: $$(-b+1-2)(-b+1+1)+\left(\frac{-b}{2}+1\right)\left(\frac{-b}{2}+2b\right)=0$$ $$\Leftrightarrow b^2+2b-8=0$$ Mà b < -1 nên b = -4. Vậy B(-7;-4), A(-1;8) Từ đó tính được C(11;-4)	0,5đ 0,5đ
7a)	- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có: $$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}=\frac{a^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{b^2}{b(c^2+a^2)}$$ $$\geq \frac{(a+b)^2}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)}=\frac{a+b}{c^2+ab}$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{b^2+c^2}=\frac{1}{c^2+a^2} \Leftrightarrow a=b$	0,5đ

7b)	$$S = \frac{bc(b+c)}{a^2+bc} + \frac{ca(c+a)}{b^2+ca} + \frac{ab(a+b)}{c^2+ab}$$ $$= \frac{(bc+a^2)(b+c)-a^2}{a^2+bc} + \frac{(ca+b^2)(c+a)-b^2(c+a)}{b^2+ca}$$ $$+ \frac{(ab+c^2)(a+b)-c^2(a+b)}{c^2+ab}$$ $$= 2(a+b+c) - \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} - \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} - \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab}$$ Áp dụng phần a: $$\frac{b+c}{a^2+bc} \le \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2}$$ $$\frac{c+a}{b^2+ca} \le \frac{c}{b^2+a^2} + \frac{a}{b^2+c^2}$$ $$\frac{a+b}{c^2+ab} \le \frac{a}{c^2+b^2} + \frac{b}{c^2+a^2}$$ Do đó: $$\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \le a+b+c$$ Nên $S \ge a+b+c = 3$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$	
8a	Giả sử 5 thẻ xếp theo thứ tự từ trên xuống dưới là: (1;2;3;4;5) Ta thực hiện 3 bước như sau: (1;2;3;4;5) → (1;4;5;2;3) → (5;2;1;4;3) → (5;4;3;2;1)	0.5đ
8b	- Dự đoán đáp số: $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ - Giả sử n thẻ mang số: $a_1; a_2; ..; a_n$ theo thứ tự từ trên xuống dưới. Ta gọi 1 cặp là 2 thẻ liên tiếp theo thứ tự từ trên xuống dưới. Ta gọi 1 cặp là 1 nghịch thế nếu là (a_i, a_{i+1}) và $a_i > a_{i+1}$ Như vậy: lúc đầu chồng thẻ có 0 nghịch thế, ta cần đưa chồng thẻ về dạng có n-1 nghịch thế. - Ta CM sau mỗi bước có tối đa 2 nghịch thế được tạo ra. Giả sử trong 1 bước, ta rút tập thẻ $(a_j, \dots a_j)$ và nhét vào giữa a_k và a_{k+1} $(0 \le k \le n)$ (coi a_0 là trước a_1 và a_{n+1} là sau a_n) Thế thì chỉ có tối đa 3 cặp bị thay đổi: $$(a_{i-1}; a_i) \to (a_{i-1}; a_{j+1})$$ $$(a_j; a_{j+1}) \to (a_k; a_i)$$	0,5đ

	$$(a_k; a_{k+1}) \to (a_j; a_{k+1})$$ Nếu cả 3 cặp này đều tạo ra nghịch thế, tức là: $$(a_{i-1} < a_i) \text{ và } (a_{i-1} > a_{j+1})$$ $$(a_j < a_{j+1}) \to (a_k > a_i)$$ $$(a_k < a_{k+1}) \to (a_j > a_{k+1})$$ Từ đó $a_j > a_{k+1} > a_k > a_i > a_{i-1} > a_{j+1} > a_j$ (Vô lí) Vậy có tối đa 2 nghịch thế được tạo ra sau mỗi bước. - Nhưng lưu ý, bước đầu tiên chuyển từ (1;2;…n) và bước cuối cùng chuyển thành (n;n-1;…;1) chỉ tạo ra được đúng 1 nghịch thế. - Với n =2k, cần tạo ra n – 1 = 2k -1 nghịch thế. Bước đầu tạo ra 1 nghịch thế, bước cuối tạo ra 1 nghịch thế, các bước còn lại tạo ra tối đa 2 nghịch thế nên số bước ít nhất là: (k-1) + 1 + 1 = k +1 - Với n = 2k+1, cần tạo ra n – 1 = 2k nghịch thế. Tương tự, số bước ít nhất là: (k-1) + 1 +1 = k+1 Vậy đáp số: $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ - Cách chuyển: (Rút 2 thẻ ở giữa đặt lên đầu) *(1;2;3;..;2k) → (k+1;k+2;..;2k;1;2;k) → (2k;1;k+1;..;2k-1;2;..k-1) → (2k;2k-1;1;2;k+1;..;2k-2;3;..;k) → … *(1;2;3;…;2k+1) → (1;k+1;..;2k+1;2;..;k) → (2k+1;2;1;k+1;…;2k;3;…;k) → …	0,25đ 0,25đ