SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG	ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ TƯ
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi	**NĂM HỌC 2019-2020**

Môn: Toán 11

Lớp: 11 A1

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm)

a) Giải phương trình lượng giác $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x$

b) Tính $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{5x^2}$

Câu 2. (2 điểm)

a) Trong một môn học, thầy giáo có 20 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 5 câu trung bình và 10 câu dễ.Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra,mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau,sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 câu (khó, dễ, Trung bình) và số câu dễ không ít hơn 2? (Không tính đến thứ tự các câu trong đề)

b) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của: $2x(1+x)^5 + x^2(1-2x)^{10}$

Câu 3. (2 điểm)

Tính giá trị nhỏ nhất ; giá trị lớn nhất của $S = \left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\right) - \dfrac{1}{8a} + 3$ với $a \in \left[\dfrac{1}{16};1\right]$

Câu 4. (1 điểm)

Cho hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ thỏa mãn $u_1 = 1; v_1 = 6$ và $u_n = u_{n-1} + n^2$; $v_n = v_{n-1} + n(n^2+3n+2)$ với mọi $n \ge 2$. Tính $\lim\dfrac{u_n^4}{v_n^3}$

Câu 5. (3 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BC, $SH = a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và HD

b) Tính góc giữa đường thẳng HD và mặt phẳng (SCD).

c) Gọi O là điểm trong không gian thỏa mãn $OS = OB = OD = OH$. Tính độ dài OS

HƯỚNG DẪN CHẤM 11A1

Câu 1:

a) Ta có $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x-1)+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

b) Ta có $\dfrac{1-\cos 2x}{5x^2}=\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{5x^2}=\dfrac{2\sin^2 x}{5x^2}=\dfrac{2}{5}.\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

Vậy $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{5x^2}=\dfrac{2}{5}$

Câu 2:

a) Ta xét ba trường hợp sau:

TH1: 1 câu khó; 1 câu khá; 3 câu dễ: $C_5^1.C_5^1.C_{10}^3$

TH2: 1 câu khó; 2 câu khá; 2 câu dễ: $C_5^1.C_5^2.C_{10}^2$

TH1: 2 câu khó; 1 câu khá; 2 câu dễ: $C_5^2.C_5^1.C_{10}^2$

Vậy số cách chọn là $C_5^1C_5^1C_{10}^3+C_5^2C_5^1C_{10}^2+C_5^1C_5^2C_{10}^2$

b) Ta sẽ tìm hệ số của x^5 trong $2x(1+x)^5$ và $x^2(1-2x)^{10}$

Ta thấy hệ số của x^5 trong $2x(1+x)^5$ sẽ bằng hai lần hệ số của x^4 trong $(1+x)^5$.

Ta có $(1+x)^5=\sum_{i=0}^{5}C_5^i x^i \Rightarrow$ hệ số của x^4 trong $(1+x)^5$ là $C_5^4=5$

Như vậy hệ số của x^5 trong $2x(1+x)^5$ là 10.

Ta thấy hệ số của x^5 trong $x^2(1-2x)^{10}$ sẽ bằng hệ số của x^3 trong $(1-2x)^{10}$ và bằng $C_{10}^7.(-2)^3$

Vậy hệ số của x^5 trong $2x\left(1+x\right)^5+x^2\left(1-2x\right)^{10}$ là $10+C_{10}^7.(-2)^3$

Câu 3:

Ta có $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(a+x)-a}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Như vậy $S = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} - \dfrac{1}{8a} + 3$ với $a \in \left[\dfrac{1}{16};1\right]$

Đặt $\dfrac{1}{2\sqrt{a}} = t; t \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Khi đó $S = t - \dfrac{t^2}{2} + 3$ với $t \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Xét bảng biến thiên của hàm số bậc hai theo t, ta có $\max S = 3 + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$;

$\min S = 3 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{16}$

Câu 4:

Ta có $u_n = u_{n-1} + n^2 = u_{n-2} + (n-1)^2 + n^2 = \ldots = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ta có:

$v_n = v_{n-1} + n(n+1)(n+2) = v_{n-2} + (n-1)n.(n+1) + n(n+1)(n+2) = \ldots = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

Xét $4v_n = 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \ldots + n(n+1)(n+2)[n+3-(n-1)]$

$= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3)$

$= n(n+1)(n+2)(n+3)$

Vậy $v_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Ta có

$$\lim \frac{u_n^4}{v_n^3} = \lim \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} . \frac{\left[n(n+1)(2n+1)\right]^4}{\left[n(n+1)(n+2)(n+3)\right]^3} = \lim \frac{4}{81} . \frac{n^{12}\left[1.\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]^4}{n^{12}\left[1.\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\right]^3} = \frac{4.2^4}{81} = \frac{64}{81}$$

Câu 5

a) Gọi N là trung điểm AD. Khi đó ta có $BN // HD$.

Như vậy $(SB;HD)=(SB;BN)$

Ta có tam giác SBN có $SB=\sqrt{SH^2+BH^2}=a\sqrt{2}$

$BN=\sqrt{AB^2+AN^2}=a\sqrt{2}$; $SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=a\sqrt{3}$

Ta có $\cos SBN=\dfrac{SB^2+BN^2-SN^2}{2SB.BN}=\dfrac{a^2}{2.2a^2}=\dfrac{1}{4}$

Suy ra $(SB;HD)=\arccos\dfrac{1}{4}$

b) Kẻ $HK\perp SC$.

Vì $SH\perp CD; BC\perp CD\Rightarrow CD\perp(SHC)$

Suy ra $HK\perp CD$. Lại có $HK\perp SC$ nên $HK\perp(SCD)$. Suy ra K là hình chiếu của H trên (SCD).

Như vậy góc giữa HD và (SCD) chính là góc giữa HD và DK.

Vì tam giác SHC vuông; HK là đường cao ứng với cạnh huyền nên

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HC^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có tam giác HKD vuông ở K nên $\tan HDK=\dfrac{HK}{HD}=\dfrac{1}{2}$.

Như vậy góc giữa HD và (SCD) là $\arctan\dfrac{1}{2}$

c) Ta thấy O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chop $S.BHD$

Do $SH\perp(BHD)$ nên điểm O được xác định như sau:

+) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD. Dựng trục của tam giác BHD (qua I và vuông góc với mặt phẳng (BHD))

+) Lấy O trên trục sao cho $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{HS}$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD. Khi đó

$SO=\sqrt{OD^2+DI^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+R^2}$

Ta có $R=\dfrac{BH.HD.BD}{4S_{BHD}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}.a\sqrt{5}}{4.\dfrac{1}{4}S_{ABCD}}=\dfrac{a^3\sqrt{10}}{2a^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Vậy $SO=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$