SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN THỨ TƯ
NĂM HỌC 2019-2020
Môn: Toán 11
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y=\frac{4x-3}{x-3}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tồn tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn tổng khoảng cách từ M hoặc N tới hai tiệm cận là nhỏ nhất. Tính độ dài MN

Câu 2. (3 điểm)

a) Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của k bằng bao nhiêu ?

b) Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1=2; u_2=1; u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2}{2u_{n+1}+1}$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

c) Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=3$.Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\geq 1.$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho n^2+1 không là ước của $n!$

Câu 4. (1,5 điểm) Cho biết đa thức $P(x)=x^{2022}+a_1x^{2021}+...+a_{2021}x+a_{2022}$ hệ số thực có 2022 nghiệm thực khác nhau và $a_{2017}=2017; a_{2019}=2019$. Chứng minh rằng $|a_{2018}|>2018$

Câu 5. (2 điểm) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

a) Tính thể tích khối chóp nếu biết $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{6}}{2}; AB=a; BC=2a$

b) Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn song song với đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

- Giả sử $M=\left(m;\dfrac{4m-3}{m-3}\right)\in(C)$, với $m\neq 3$.

- Tiệm cận đứng là: $x=3$, riệm cận ngang là: $y=4$.

Do đó tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là:

$$d=|m-3|+\left|\frac{4m-3}{m-3}-4\right|=|m-3|+\frac{9}{|m-3|}\geq 2.\sqrt{|m-3|.\frac{9}{|m-3|}}=6$$

Dấu ”= ” xảy ra khi và chỉ khi $|m-3|=\dfrac{9}{|m-3|}\Leftrightarrow (m-3)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3=3 \\ m-3=-3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M=(6;7) \\ M=(0;1) \end{array}\right.$. Một cách tương tự ta có các điểm $\left[\begin{array}{l} N=(6;7) \\ N=(0;1) \end{array}\right.$.

Do M, N phân biệt nên $MN=6\sqrt{2}$.

Câu 2:

a) Gọi biến cố A : Lấy k tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ chia hết cho 4. Với $1\leq k\leq 10$.

Suy ra $\overline{A}$: Lấy k tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4.

Ta có: $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_8^k}{C_{10}^k}\Rightarrow P(A)=1-\dfrac{C_8^k}{C_{10}^k}=1-\dfrac{(10-k)(9-k)}{90}$.

Theo đề: $1-\dfrac{(10-k)(9-k)}{90}>\dfrac{13}{15}\Leftrightarrow k^2-19k+78<0\Leftrightarrow 6<k<13$.

Vậy $k=7$ là giá trị cần tìm.

b) Quy nạp ta thấy cả dãy số $\{u_n\}$ đều là các số dương.

Xét $u_{n+2}-u_{n+1}=\dfrac{-u_{n+1}^2-u_{n+1}}{2u_{n+1}+1}<0$

Suy ra dãy trên giảm; bị chặn dưới bởi 0.

Suy ra $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn là a. Thay vào biểu thức ta tính được a = 0.

c)

Theo bất đẳng thức Cauchy cho các số thực dương ta có:

$$\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\le\frac{(x+2)+(x^2-2x+4)}{2}=\frac{x^2-x+6}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\ge\frac{2x^2}{x^2-x+6}$$

Tương tự, ta cũng có $\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}\ge\frac{2y^2}{y^2-y+6}$; $\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{2z^2}{z^2-z+6}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{2x^2}{x^2-x+6}+\frac{2y^2}{y^2-y+6}+\frac{2z^2}{z^2-z+6}.\quad(1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$\frac{2x^2}{x^2-x+6}+\frac{2y^2}{y^2-y+6}+\frac{2z^2}{z^2-z+6}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\quad(2)$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\ge 1\quad(3)$$

Thật vậy:

Ta có:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18\\&=(x+y+z)^2-(x+y+z)-2(xy+yz+zx)+18\\&=(x+y+z)^2-(x+y+z)+12>0\end{aligned}$$

Nên $(3)\Leftrightarrow 2(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 6$$

Mặt khác, do *x*, *y*, *z* là các số dương nên ta có:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

$$x+y+z\ge\sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

Mà $xy+yz+zx=3$ nên bất đẳng thức (3) đúng.

Từ (1), (2) và (3), ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 3:

Ta sẽ chứng minh $v_p(a)=v_p(b)$ với mọi số nguyên tố p.

Ta có thể viết lại điều kiện đề bài thành $a^{4n+1}\mid b^{4n+3}; b^{4n+2}\mid a^{4n+4}$

Từ điều kiện $a^{4n+1}\mid b^{4n+3}$ ta có $(4n+1)v_p(a)\le(4n+3)v_p(b),\forall n\in\mathbb{N}^*$

Suy ra $v_p(a)\le\lim\frac{4n+3}{4n+1}v_p(b)=v_p(b)$

Tương tự từ $b^{4n+2}\mid a^{4n+4}$ ta cũng có $v_p(b)\le v_p(a)$

Từ đó ta có ngay $a=b$.

Câu 4:

Theo định lý Rolle thì $P'(x)$ có 2021 nghiệm thực phân biệt. Tương tự $P''(x)$ có 2020 nghiệm thực phân biệt.

Hơn nữa $P^{(3)}(x) = 2022.2021.2020.x^{2019} + ... + 4.3.2.a_{2018}x + 3.2.a_{2019}$

Do $P^{(3)}(0) = 3.2.a_{2019} = 3.2.2019 \neq 0$ nên đa thức

$$Q(x) = x^{2019}P^{(3)}\left(\frac{1}{x}\right) = 6a_{2019}x^{2019} + 24a_{2018}x^{2018} + ... + b_1$$

cũng có 2019 nghiệm phân biệt. Giả sử đó là $x_1; x_2; ...; x_{2019}$

Theo định lý Vi – ét ta có $\sum_{i=1}^{2019} x_i = -\frac{24a_{2018}}{6a_{2019}}; \sum_{1\le i\le j\le 2019} x_i x_j = \frac{60a_{2017}}{6a_{2019}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $(\sum_{i=1}^{2019} x_i = -\frac{24a_{2018}}{6a_{2019}})^2 \geq 2\sum_{1\le i\le j\le 2019} x_i x_j = 2.\frac{60a_{2017}}{6a_{2019}}$

$$\Leftrightarrow a_{2018}^2 \geq \frac{5}{4}a_{2017}a_{2019}$$

$$\Rightarrow |a_{2018}| > 2018$$

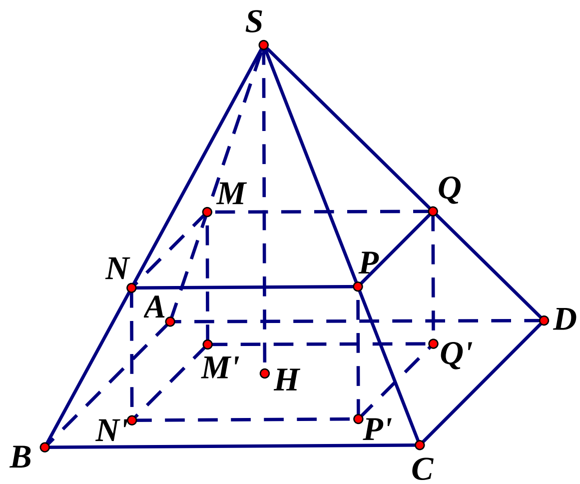
Câu 5

a) Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; hay nói cách khác chính là giao điểm O hai đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{3}{2}a^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^3}{3}$

b)



Đặt $\dfrac{SM}{SA} = k$ với $k \in [0;1]$.

Xét tam giác SAB có $MN // AB$ nên $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = k \Rightarrow MN = k.AB$

Xét tam giác SAD có $MQ // AD$ nên $\dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = k \Rightarrow MQ = k.AD$

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$MM' // SH$ nên $\dfrac{MM'}{SH} = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{SA - SM}{SA} = 1 - \dfrac{SM}{SA} = 1 - k \Rightarrow MM' = (1-k).SH$.

Ta có $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.MM' = AB.AD.SH.k^2.(1-k)$.

Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.AB.AD \Rightarrow V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = 3.V_{S.ABCD}.k^2.(1-k)$.

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1-k)$ lớn nhất.

Ta có $k^2.(k-1) = \dfrac{2(1-k).k.k}{2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-2k+k+k}{3}\right)^3 \Rightarrow k^2.(k-1) \le \dfrac{4}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1-k) = k \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$.