

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + m^3 + 3m^2$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m=0$
2. Tìm m sao cho đồ thị đạt cực đại, cực tiểu tại A và B mà tam giác OAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{10}$

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos^2 x = \frac{(\sin x + 2 \cos x + \sqrt{3} \cos 2x)(1 - \sin x)}{2 \cos x + 1}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ y = 4x^3 - x + 3 \end{cases}$

Câu III (1 điểm). Tính tích phân sau: $I = \int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}} dx$

Câu IV (1 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $SD=a$. Gọi O là giao AC và BD. Biết (SAC) vuông góc với (ABCD), góc giữa SC và (ABCD) bằng 30° và $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và góc giữa hai đường thẳng SO, AD.

Câu V (1 điểm). Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $(x+1)(y+1)=4$. Tìm GTNN của $A = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y}$

Câu VI (2 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(2,3), trọng tâm G(2,0), điểm B có hoành độ âm thuộc đường thẳng $d: x+y+5=0$. Viết phương trình đường tròn tâm C bán kính $\frac{9}{5}$, tiếp xúc với đường thẳng BG.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, điểm M(1,2,-3) và mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$. Gọi A là giao của d và (P). Tìm điểm B trên mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng MB cắt d tại C mà tam giác ABC vuông tại C.

Câu VII (1 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$, M và N là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = (1+i)^n, z_2 = 4+mi, m \in \mathbb{R}$. Tìm m sao cho $MN = 5$

Đáp án đề thi thử khối D lần 2 năm học 2012-2013

Câu I. (2 điểm)

1. Khi $m=0$, hàm số có dạng: $y = x^3 + 3x^2$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3(1 + \frac{3}{x}) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2; y(0) = 0; y(-2) = 4$

0,25 đ

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		+ 0 -	0 +	
y	$-\infty$	↗ 4	↘ 0	↗ $+\infty$

0,25 đ

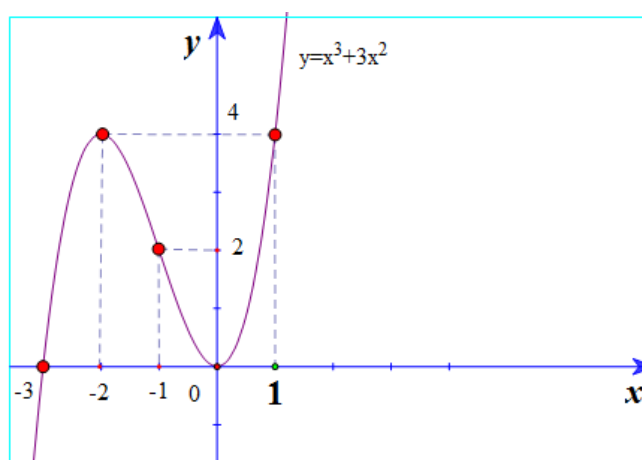
Hàm số đồng biến trên $(-\infty, -2); (0, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-2, 0)$

Đồ thị có điểm cực đại: $A(-2, 4)$ và điểm cực tiểu $B(0, 0)$

0,25đ

Đồ thị:

- Đồ thị qua các điểm: A, B, U, C(-3,0); D(1,4)
- Vẽ đồ thị:



0,25 đ

2. +) $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 3m(m+2) = 0 \Leftrightarrow x = -m, x = -m-2$ nên đồ thị luôn có 2 cực trị

$$A(-m, 0); B(-m-2, 4).$$

0,25 đ

A, B, O tạo thành tam giác $\Leftrightarrow m \neq 0$

+) Viết phương trình trung trực AB: $x-2y+m+5=0$

+) Viết phương trình trung trực OA: $x+\frac{m}{2}=0$

0, 25 đ

+) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $I(-\frac{m}{2}, \frac{m+10}{4})$

0,25 đ

+) $IO^2 = 10 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ hoặc $m = 2$

Đáp số: $m = -6$ hoặc $m = 2$

0,25 đ

Câu II. (2 điểm)

1. Đk: $\cos x \neq -\frac{1}{2}$.

Phương trình trở thành: $(1 - \sin x)(1 + \sin x)(2 \cos x + 1) = (\sin x + 2 \cos x + \sqrt{3} \cos 2x)(1 - \sin x)$

0,25 đ

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x) = 0$$

Giải phương trình: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

0,25 đ

Giải phương trình : $1 + \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

0,25 đ

Đối chiếu điều kiện được: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

0,25 đ

$$2. \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ y = 4x^3 - x + 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 4x^3 - x + 3 \\ y = 4x^3 - x + 2y^3 - 2x^3 (*) \end{cases}$$

$$(*) \leftrightarrow y + x = 2x^3 + 2y^3 \leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 - \frac{1}{2}) = 0$$

0,25 đ

$$\text{Th1: } x + y = 0, \text{ ta được: } 4x^3 + 3 = 0 \leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; y = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

0,25 đ

$$\text{Th2: } x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } y^2 \leq \frac{2}{3}. \text{ Tương tự } x^2 \leq \frac{2}{3}$$

0,25 đ

$$\text{Từ đó: } |y^3 - x^3| \leq |x^3| + |y^3| \leq 2(\sqrt{\frac{2}{3}})^3 < \frac{3}{2} \text{ nên trường hợp này không xảy ra.}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm: } (x, y) = (-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$$

0,25đ

Câu III. (1 điểm)

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \text{ thì } x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt. \text{ Đổi cận}$$

0,25 đ

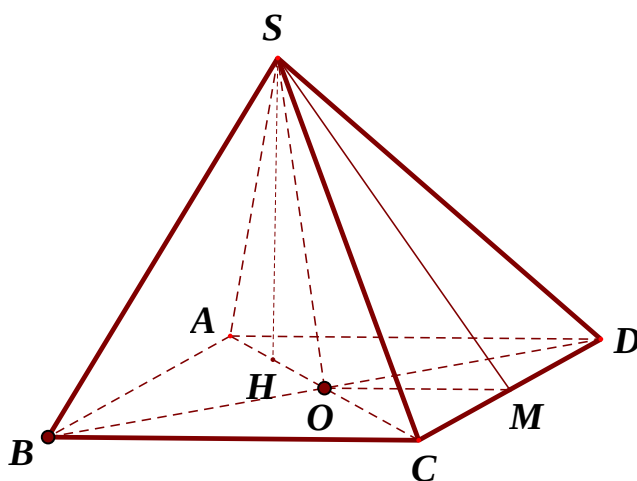
$$I = \int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{t^2 + t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{t+1} dt$$

0,25 đ

$$\rightarrow I = (\ln(t+1))^2 \Big|_1^2 = \ln^2 3 - \ln^2 2$$

0,5 đ

Câu IV. (1 điểm)



1)

+) Do $(SAC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến $AC, BD \perp AC \rightarrow BD \perp (SAC)$

Ta được: $BD \perp SO$ nên $OD = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$ nên $ABCD$ là hình vuông. Suy ra $S_{ABCD} = a^2$

0,25 đ

+) Tam giác SAC có $SO = OA = OC$ nên vuông tại S.

Kẻ $SH \perp AC$ thì $SH \perp (ABCD)$ nên $\angle(SC, (ABCD)) = \angleSCH = 30^\circ$.

Suy ra: $\frac{SH}{SA} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; SA = \frac{1}{2}AC$ nên $SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

0,25 đ

2)

Ta có: $\frac{SC}{AC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $SC = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Gọi M trung điểm CD thì $OM \parallel AD$ nên $\angle(SO, AD) = \angle(SO, OM)$.

0,25 đ

Công thức trung tuyến cho tam giác $\triangle SCD$ được: $SM = a$.

Định lý cosin cho tam giác: $\triangle SOM$ được: $\cos \angle SOM = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SO và AD là $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$

0,25 đ

Câu V. (1 điểm)

Đặt $x+y=S, xy=P$ thì $(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=S+P+1=4 \Leftrightarrow S+P=3$

Tồn tại x, y nếu $S^2 \geq 4P$

$$\text{Khi đó } A = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 3y}{xy + 3(x+y) + 9} + \frac{xy}{x+y} = \frac{S^2 - 2P + 3S}{P + 3S + 9} + \frac{3-S}{S}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{S^2 + 5S - 6}{2S + 12} + \frac{3-S}{S} = \frac{S}{2} + \frac{3}{S} - \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow A \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $S = \sqrt{6}, P = 3 - \sqrt{6}$, (thỏa mãn: $S^2 \geq 4P$)

$$\text{Hay } (x, y) = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2}; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2} \right) \quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2}; \frac{\sqrt{6} + \sqrt{4\sqrt{6} - 6}}{2} \right) \text{ Vậy}$$

$$\min A = 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}$$

Câu VI (2 điểm)

1. +) Do $B \in d: x+y+5=0$ nên $B(b, -5-b) (b < 0) \rightarrow \overrightarrow{BG} = (2-b, 5+b)$

Phương trình (BG): $(5+b)(x-2) + (b-2)y = 0$

0,25 đ

+) G là trọng tâm tam giác ABC nên $C(4-b, b+2)$

0,25 đ

+) Đường tròn tâm C, bán kính $\frac{9}{5}$ tiếp xúc với (BG)

$$\Leftrightarrow \frac{|(5+b)(2-b) + (b+2)(b-2)|}{\sqrt{(5+b)^2 + (b-2)^2}} = \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 63b^2 - 1386b - 1449 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 22b - 23 = 0$$

0,25 đ

+) Giải phương trình được $b = -1$ (vì $b < 0$).

Khi đó, $C(5,1)$ nên phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{25}$$

0,25 đ

2.

Ta có: $C \in d$ nên $C(2c+1; c; -c-1) \rightarrow \overrightarrow{MC} = (2c; c-2; 2-c)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2, 1, -1)$

0,25 đ

Tam giác $\triangle ABC$ vuông tại C nên $\overrightarrow{MC} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2c \cdot 2 + c - 2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$. Suy ra $\overrightarrow{MC} = (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

0,25 đ

Ta được $\vec{v} = (1, -1, 1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (MC) nên

$$(MC): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}.$$

0,25 đ

$B \in (MC)$ nên $B(b+1; b+2; b-3)$.

$B \in (P) \Leftrightarrow b+1 + (b+2) + (b-3) - 3 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy $B(2, 3, -2)$

0,25 đ

Câu VII. (1 điểm)

Giải phương trình $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$. Đk: $n \geq 3 < n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 4n(n-1) + n = 49$$

0,25 đ

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-7)(n^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (t/m)}$$

0,25 đ

Khi đó: $z_1 = (1+i)^7 = [(1+i)^2]^3(1+i) = 8i^3(1+i) = -8i(1+i) = 8-8i$. Vậy $M(8, -8)$.

0,25 đ

Do $N(4, m)$ nên $MN = 5 \Leftrightarrow 4^2 + (8+m)^2 = 25 \Leftrightarrow (m+8)^2 = 9 \Leftrightarrow m = -5$ hoặc $m = -11$

Đáp số: $m = -5$ hoặc $m = -11$

0,25 đ